

TP8-9 Python - Seuils - Résolution approchée d'équations

1 Notion de seuil : valeur approchée

Exercice 1 Divergence de la série harmonique

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

1. Rappeler la monotonie de cette suite.
2. Écrire un script Python qui trace les n premiers termes de la suite. Tester votre script avec différentes valeurs, et conjecturer le comportement de (H_n) lorsque $n \rightarrow +\infty$.
3. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, H_n \geq \ln(n)$. (On pourra s'aider de la question 1 de l'exercice 2).
4. Expliquer pourquoi la phrase logique suivante est correcte, et ce qu'elle signifie :

$$\forall A > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}^*, \forall n \geq n_0, H_n > A.$$

On cherche à déterminer, pour tout $A > 0$, le plus petit $n_0 \in \mathbb{N}^*$ vérifiant la relation ci-dessus.

5. Compléter le script suivant afin que la fonction `seuil(A)` renvoie l'entier correspondant.

```
import numpy as np

def seuil(A):
    n=1
    H=1
    while ...:
        ...
        ...
    return ...
```

6. Tester votre fonction avec de **petites** valeurs de A . (NB : n'essayez pas ce programme avec un nombre trop grand. Par exemple, pour $A = 30$, en supposant que Python soit assez précis dans ses calculs numériques - ce qui n'est pas le cas - il faudrait une centaine de jours pour obtenir le résultat. Pour $A = 40$, quelques millénaires. Vous pouvez essayer de retrouver ces estimations via l'encadrement vu en cours.)

Exercice 2 Constante d'Euler

On a vu dans l'exercice précédant que la série harmonique divergeait. On a vu en classe un encadrement de la série harmonique par le logarithme. On cherche dans cet exercice à obtenir une estimation plus précise.

1. Montrer que :

$$\forall x > 0, \frac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln(x) < \frac{1}{x}.$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$u_n = H_n - \ln(n+1), \quad , v_n = H_n - \ln(n).$$

Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

3. En déduire qu'il existe $\gamma \in \mathbb{R}$ et une suite $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, H_n = \ln(n) + \gamma + \varepsilon_n, \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon_n = 0.$$

4. Montrer que $\gamma \in]0, 1]$.

On cherche à déterminer une valeur approchée de γ . On utilise pour cela les deux suites u et v .

5. Expliquer pourquoi, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $\varepsilon > 0$,

$$|u_n - v_n| < \varepsilon \Rightarrow |v_n - \gamma| < \varepsilon.$$

6. En déduire une fonction Python `gamma(e)` qui, à une erreur acceptable e , renvoie une approximation à e près de la constante γ .
7. Donner une approximation à 10^{-6} près de γ .

2 Résolution d'équations

Le but de cette section est de présenter et implémenter deux méthodes pour déterminer des approximations numériques de solutions d'équations de la forme

$$f(x) = 0 \tag{1}$$

basées sur les propriétés de régularité de la fonction f .

2.1 Cas continue : par dichotomie

Supposons dans cette section que l'on dispose d'une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ définie sur un **intervalle**, et **continue**. On suppose par ailleurs que l'on est capable de déterminer deux réels $a, b \in I$ tels que $f(a)f(b) \leq 0$. Quitte à inverser a et b , on suppose de plus que $a < b$. L'algorithme de dichotomie consiste alors à créer deux suites (a_n) et (b_n) comme suit :

— $a_0 = a, \quad b_0 = b.$

— Pour $n \in \mathbb{N}$, on distingue deux cas : si $f(a_n)f\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) \leq 0$, on pose

$$a_{n+1} = a_n, \quad b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$$

sinon, on pose

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \quad b_{n+1} = b_n.$$

Exercice 3 Étude théorique

1. Montrer que les suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ainsi définies sont adjacentes.
2. En déduire qu'elles convergent vers une même limite $c \in I$.
3. Déterminer $f(c)$.
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, donner une majoration de $|a_n - c|$ en fonction de $b - a$.

Exercice 4 Calculer des racines carrées

En utilisant l'algorithme de dichotomie, écrire une fonction `racine(N)` qui renvoie une valeur approchée de la racine carrée d'un entier N donné à 10^{-3} près. Tester votre programme sur quelques valeurs bien choisies de N .

Exercice 5 Dichotomie et suite implicite

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, justifier que l'équation

$$xe^x = n$$

d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ admet une unique solution. On note u_n cette solution.

2. Écrire une fonction `suite(n)` qui prend en argument un entier n et renvoie une approximation à 10^{-3} près de u_n .
3. Modifier votre fonction afin qu'elle affiche les n premières valeurs de la suite u . Conjecturer la monotonie de la suite.
4. Étudier la monotonie et la convergence de la suite (u_n) .

2.2 Cas dérivable : la méthode de Newton

On suppose dans cette section que $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est **dérivable**. On suppose de plus que :

- f' ne s'annule pas sur $[a, b]$.
- $f(a)f(b) \leq 0$.

Exercice 6

Montrer que, sous ces hypothèses, l'équation (1) admet une unique solution dans $[a, b]$.

On construit alors une suite (u_n) comme suit :

- On part d'un point $u_0 \in [a, b]$ quelconque.
- Pour $n \in \mathbb{N}$, u_{n+1} est le point d'intersection de la tangente à la courbe représentative de f en u_n avec l'axe des abscisses.

Exercice 7

On suppose que la suite (u_n) est bien définie (Attention : ce n'est pas toujours le cas).

1. rappeler l'équation de la tangente à une courbe.
2. En déduire la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = u_n - \frac{f(u_n)}{f'(u_n)}.$$

3. On suppose maintenant que f est C^1 et que la suite est convergente vers $c \in \mathbb{R}$. Déterminer $f(c)$.

Exercice 8 Cas pratique

On considère la fonction $f : x \in [1, 2] \mapsto x^2 - 2$.

1. Écrire un programme qui prend en entrée un entier n et renvoie le $n^{\text{ème}}$ terme de la suite définie ci-dessus, en partant de $u_0 = 1$.
2. a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{(u_n - \sqrt{2})^2}{2u_n}.$$

- b) En déduire que $|u_n - \sqrt{2}| \leq |u_0 - \sqrt{2}|^{2^n}$.
3. Montrer que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite. Quelle précision obtient-on en 10 itérations ? Comparer avec la précision obtenue par la méthode de dichotomie.