

TP11 Python - Intégrales

Ouvrir Pyzo (ou votre IDE favori), ouvrir un fichier .py dans l'éditeur et le sauvegarder dans un dossier approprié.

Exercice 1 Un encadrement

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln \left(\frac{k}{n} \right)$.

1. a) Écrire une fonction `suite(n)` qui prend en argument un entier n et renvoie u_n . (On pourra utiliser la commande `sum`. On rappelle que le logarithme peut être appelé dans la bibliothèque `numpy`, que l'on prendra soin de charger.)
b) En utilisant la fonction ci-dessus, écrire un programme qui trace les N premiers termes de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, pour N à spécifier dans le programme. (Là encore, on chargera préalablement la bibliothèque `matplotlib.pyplot`.)
c) Conjecturer la monotonie de la suite, et sa convergence éventuelle.
2. (*Étude théorique*)

a) Soient $a, b \in \mathbb{R}_+$. Calculer $\int_a^b \ln t \, dt$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$, et $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$. Justifier que :

$$\frac{1}{n} \ln \left(\frac{k}{n} \right) \leq \int_{k/n}^{\frac{k+1}{n}} \ln t \, dt \leq \frac{1}{n} \ln \left(\frac{k+1}{n} \right).$$

c) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$,

$$u_n \leq \int_{1/n}^1 \ln t \, dt \leq u_n + \frac{\ln n}{n}.$$

d) En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente, et déterminer sa limite. Comparer avec la valeur obtenue graphiquement.

Méthode des rectangles

On rappelle le résultat sur les sommes de Riemann : si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est continue, alors les sommes de Riemann, définies par

$$S_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f \left(a + k \frac{b-a}{n} \right) \quad (1)$$

définissent une suite convergente, et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(f) = \int_a^b f(t) \, dt.$$

On rappelle par ailleurs que, si f est de classe C^1 sur $[a, b]$, on peut majorer l'erreur par

$$\left| S_n(f) - \int_a^b f(t) \, dt \right| \leq \sup_{x \in [a, b]} |f'(x)| \frac{(b-a)^2}{2n}. \quad (2)$$

Exercice 2

1. Déterminer, si elle existe, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}$.
2. Déterminer, si elle existe, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\prod_{k=1}^n (n+k) \right)^{1/n}$.

Implémentation Python

Exercice 3

On pose $f_1(t) = \frac{1}{1+t}$, $f_2(t) = \sin(t)e^{-t}$, et $f_3(t) = e^{\sqrt{t}}$.

1. Déterminer les domaines de définition des trois fonctions définies par ces relations.
2. Écrire une fonction qui prend en argument un réel t et renvoie $f_1(t)$. Faire de même avec f_2 et f_3 .
3. Écrire une fonction `Riemann(a,b,n,f)` qui prend en argument deux réels a et b , un entier n , et une fonction f , et qui renvoie la somme de Riemann (1).
4. Tester votre programme en approximant les intégrales

$$\int_0^2 \frac{dt}{1+t}, \int_0^\pi \sin(t)e^{-t} dt, \text{ et } \int_0^1 e^{\sqrt{t}} dt.$$

On pourra prendre $n = 100$.

5. Calculer ces trois intégrales (un calcul direct, une intégration par parties, un changement de variable), et comparer le résultat obtenu.

Exercice 4

On considère la fonction définie pour tout $t \in \mathbb{R}$ par $f(t) = \frac{1}{1+t^2}$. Soit $I = \int_0^1 f(t) dt$.

1. Justifier que $I = \frac{\pi}{4}$.
2. Déterminer $f'(t)$, puis $\sup_{x \in [0,1]} |f'(x)|$.
3. Écrire une fonction `approxpi(eps)` qui, en utilisant (2) et I , prend en argument un réel ε , et renvoie une approximation de π à ε -près.