

Applications linéaires 2

1 Application réciproque et matrice inverse

1.1 Représentation matricielle de la réciproque

Exercice 1. Inverses.

On considère les matrices réelles A et B et les matrices complexes C et D suivantes.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix}.$$

- 1) Montrez que la matrice B est l'inverse de la matrice A .
- 2) Montrez que la matrice D est l'inverse de la matrice C .

Exercice 2. Inverse de matrice diagonale.

Soient a , b et c trois réels. On considère la matrice A suivante.

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}.$$

Sous quelle(s) condition(s) la matrice A est-elle inversible ? Calculez son inverse pour ces conditions.

Exercice 3. Équation du second degré.

Considérons les matrices A et B de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définies par

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

- 1) Vérifiez que $A^2 - 5A + 4\text{Id}_2 = 0_{2 \times 2}$.
- 2) Déduisez-en que A est inversible et calculez son inverse.
- 3) Vérifiez que $B^2 - 2B - 3\text{Id}_2 = 0_{2 \times 2}$.
- 4) En déduire que B est inversible et calculez son inverse.

1.2 Calcul de la matrice inverse

Exercice 4. Calculs d'inverses.

Déterminez l'inverse de chacune des matrices suivantes. Vérifier vos résultats en calculant pour chaque matrice le produit avec sa matrice inverse.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2-i & i & 1 \\ i & 1 & 1+i \\ 3-i & i & 2 \end{pmatrix}.$$

1.3 Propriétés de l'inverse

Exercice 5. Simplification.

Soient A , B et C trois matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Si C est inversible alors on a l'implication :

$$CA = CB \Rightarrow A = B.$$

- 1) On suppose que C est inversible. Montrez que si $CA = CB$, alors $A = B$.
- 2) Trouvez un contre-exemple dans le cas où C n'est pas inversible.

Exercice 6. Inverses et manipulations algébriques.

On considère les matrices A et B de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ définies par

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

- 1) La matrice A est-elle inversible ? Si oui, déterminez A^{-1} .
- 2) La matrice B est-elle inversible ? Si oui, déterminez B^{-1} .
- 3) Montrez que la matrice A est nilpotente.
- 4) Que vaut la matrice $B - A$? En utilisant la formule du binôme, explicitez B^n pour tout entier positif n .
- 5) L'expression déterminée à la question précédente demeure-t-elle valable pour $n = -1$?
- 6) Pourquoi peut-on affirmer sans calcul que $(B - \text{Id}_4)^2$ est la matrice nulle ?
- 7) En déduire qu'il existe une matrice C , dont on précisera les termes, vérifiant $BC = \text{Id}_4$.
- 8) Les résultats des questions 5 et 7 sont-ils cohérents ?

Exercice 7. Matrice de rotation.

Pour tout α dans $\mathbb{R}$, on note A_α la matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définie par

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

On appelle E l'ensemble des matrices de cette forme, autrement dit $E = \{A_\alpha \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$.

- 1) Montrez que E est stable pour la multiplication.
- 2) Montrez que la multiplication de matrices de E est commutative.
- 3) Calculez A_α^n pour $n \in \mathbb{N}^*$.
- 4) Montrez que A_α est inversible et calculez son inverse.

2 Image et noyau d'une application linéaire

2.1 Définitions

Exercice 8. Image.

Déterminez l'image des applications linéaires suivantes à l'aide d'un pivot de Gauss.

$$\begin{aligned} f_1 : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2, & f_2 : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^2, & f_3 : \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^2, \\ (x, y) &\mapsto (x, 0), & x &\mapsto (x, x), & (x, y, z) &\mapsto (x + y, y + z). \end{aligned}$$

Exercice 9. Noyau.

Déterminez le noyau des applications linéaires définies dans l'exercice 8 en utilisant le pivot de Gauss.

Exercice 10. Image et noyau.

Déterminez l'image et le noyau des applications linéaires définies dans l'exercice 8 sans utiliser le pivot de Gauss.

Exercice 11. Injectivité et noyau.

Soit f une application linéaire de E dans F . L'objectif de cet exercice est de montrer que f est injective si et seulement si $\text{Ker}(f) = \{0_E\}$. Montrons dans un premier temps l'implication directe. Supposons f injective et montrons que son noyau est réduit au vecteur nul.

1) Soit $x \in \text{Ker}(f)$. Montrez que $f(x) = f(0_E)$.

2) Montrez ensuite que x est nécessairement nul et concluez.

Démontrons maintenant la réciproque. Supposons que $\text{Ker}(f) = \{0_E\}$ et montrons que f est injective. Soient x, y deux vecteurs de E tels que $f(x) = f(y)$. Montrons que nécessairement, $x = y$.

3) Montrez que $x - y \in \text{Ker}(f)$.

4) Concluez.

2.2 Rang

Exercice 12. Rang d'une matrice.

Calculez le rang de la matrice A de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}.$$

Exercice 13. Injective, surjective et bijective.

Soit f une application linéaire de $E = \mathbb{K}^m$ dans E .

1) Montrez que si f est injective, alors elle est surjective. Vous pouvez utiliser le théorème du rang.

2) De la même manière, montrez que si f est surjective, alors f est injective.

3) Déduisez-en que

$$(f \text{ est injective}) \iff (f \text{ est surjective}) \iff (f \text{ est bijective}).$$

Exercice 14. Construction d'application linéaire.

On considère l'espace des applications linéaires de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$.

1) Les vecteurs $(1, 2)$ et $(7, 3)$ constituent-ils une base de $\mathbb{R}^2$?

2) Explicitiez toutes les applications linéaires de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ vérifiant $f(1, 2) = (-1, 3)$ et $f(7, 3) = (4, 10)$.

3) f est-elle bijective ? Si oui, calculez son inverse.

4) Déterminez le noyau et l'image de f .

Exercice 15. Existence d'application linéaire.

Pour chacune des questions suivantes, existe-t-il une application linéaire vérifiant la propriété demandée ? Si oui, déterminez-en une, sinon, expliquez pourquoi son existence est impossible.

- 1) $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ telle que $\text{Im}(f) = \text{Vect}((1, 2, 0, 3), (1, 0, 3, 2))$.
- 2) $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ telle que $\text{Im}(f) = \text{Vect}((1, -1, 2), (3, 0, -1))$.
- 3) $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ avec $\text{Im}(f)$ engendrée par quatre vecteurs linéairement indépendants.
- 4) $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ telle que $\text{Ker}(f) = \text{Vect}((2, 0, -1), (1, 1, 1))$.
- 5) $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ telle que $\text{Ker}(f) = \text{Vect}((1, 0, 1), (0, 1, 1))$.
- 6) $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ avec f injective.

Exercice 16. Synthèse.

Soit f une application de E dans F et $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ une base de E . Déterminez au moins trois moyens distincts permettant de démontrer que

- 1) f est injective.
- 2) f est surjective.