

DL généralisés

1 Rappels de cours

Définition 1 (DL en $\pm\infty$). On dit qu'une fonction réelle f admet un *développement limité en puissances de x^{-1}* au voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$) si la fonction g définie au voisinage de 0^+ (resp. 0^-) par $g(h) = f(\frac{1}{h})$ admet un développement limité en 0. Si ce développement s'écrit $g(h) = P(h) + o(h^n)$, alors au voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$), on a l'approximation

$$f(x) = P\left(\frac{1}{x}\right) + o\left(\frac{1}{x^n}\right).$$

Définition 2 (développement généralisé). On dit qu'une fonction réelle f définie au voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}$ admet un *développement limité généralisé en puissance entière de h* à l'ordre n au voisinage de x_0 s'il existe un entier $p \geq 0$ tel que la fonction $h \mapsto h^p f(x_0 + h)$ admet un DL d'ordre $n + p$ au voisinage de 0 :

$$h^p f(x_0 + h) = a_0 + a_1 h + \dots + a_{n+p} h^{n+p} + o(h^{n+p}).$$

Dans ce cas, le développement limité généralisé de f à l'ordre n est donné par

$$f(x_0 + h) = \frac{a_0}{h^p} + \frac{a_1}{h^{p-1}} + \dots + a_p + \dots + a_{p+n} h^n + o(h^n).$$

Proposition 1 (asymptote). Si une fonction f admet un développement généralisé à l'ordre $n \geq 1$ au voisinage de $+\infty$ de la forme

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x^n} + o\left(\frac{1}{x^n}\right)$$

avec $a, b, c \in \mathbb{R}$, alors la courbe représentative de f admet pour asymptote la droite d'équation $y = ax + b$ et le signe du terme $\frac{c}{x^n}$ au voisinage de $+\infty$ donne la position de la courbe par rapport à son asymptote. Le résultat reste valable au voisinage de $-\infty$.

Exemple 1 (développements généralisés et asymptotes). Considérons la fonction réelle f définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$f(x) = \sqrt{1 + x + x^2}.$$

Pour calculer les développements limites généralisés à l'ordre 1 de f aux voisinages de $+\infty$ et $-\infty$, on effectue le changement de variable $h = x^{-1}$, de sorte que lorsque x est au

voisinage de $\pm\infty$, h est au voisinage de 0. On a

$$f(x) = f\left(\frac{1}{h}\right) = \sqrt{1 + \frac{1}{h} + \frac{1}{h^2}} = \sqrt{\frac{h^2 + h + 1}{h^2}} = \frac{\sqrt{h^2 + h + 1}}{\sqrt{h^2}} = \frac{1}{|h|} \times \sqrt{h^2 + h + 1}.$$

Comme le facteur $|h|^{-1}$ diminuera l'ordre d'une unité, on doit déterminer le développement limité de la fonction $h \mapsto \sqrt{h^2 + h + 1}$ à l'ordre 2 au voisinage de 0. On rappelle les développements suivants,

$$1 + h + h^2 = 1 + h + h^2 + o(h^2) \quad \text{et} \quad \sqrt{1 + h} = (1 + h)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{h}{2} - \frac{h^2}{8} + o(h^2).$$

D'après le théorème de composition des développements limités, on trouve

$$\begin{aligned} \sqrt{1 + h + h^2} &= 1 + \frac{(h + h^2)}{2} - \frac{(h + h^2)^2}{8} + o(h^2) = 1 + \frac{h}{2} + \frac{h^2}{2} - \frac{h^2}{8} + o(h^2) \\ &= 1 + \frac{h}{2} + \frac{3h^2}{8} + o(h^2). \end{aligned}$$

■ Au voisinage de $+\infty$, on a $h > 0$, donc

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{|h|} \times \sqrt{h^2 + h + 1} = \frac{1}{h} \times \left(1 + \frac{h}{2} + \frac{3h^2}{8} + o(h^2)\right) = \frac{1}{h} + \frac{1}{2} + \frac{3h}{8} + o(h) \\ &= x + \frac{1}{2} + \frac{3}{8x} + o\left(\frac{1}{x}\right). \end{aligned}$$

La fonction f admet comme asymptote la droite d'équation $y = x + \frac{1}{2}$ au voisinage de $+\infty$. De plus, la courbe de f est au-dessus de son asymptote puisque $\frac{3}{8x}$ est positif au voisinage de $+\infty$.

■ Au voisinage de $-\infty$, on a $h < 0$, donc

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{|h|} \times \sqrt{h^2 + h + 1} = \frac{1}{-h} \times \left(1 + \frac{h}{2} + \frac{3h^2}{8} + o(h^2)\right) = -\frac{1}{h} - \frac{1}{2} - \frac{3h}{8} + o(h) \\ &= -x - \frac{1}{2} - \frac{3}{8x} + o\left(\frac{1}{x}\right). \end{aligned}$$

La fonction f admet comme asymptote la droite d'équation $y = -x - \frac{1}{2}$ au voisinage de $-\infty$. De plus, la courbe de f est au-dessus de son asymptote puisque $-\frac{3}{8x}$ est positif au voisinage de $-\infty$. ▲

2 Exercices d'application

Exercice 1. Développements en $+\infty$.

Donnez le développement limité en $+\infty$ des expressions suivantes à la précision indiquée.

- 1) $x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ à la précision $\frac{1}{x^4}$.
- 2) $\frac{1}{x \sin(x^{-1})}$ à la précision $\frac{1}{x^4}$.
- 3) $\frac{1}{2+x}$ à la précision $\frac{1}{x^3}$.
- 4) $\frac{1+x^2}{(1+x)(2-x)}$ à la précision $\frac{1}{x^3}$.
- 5) $\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^x$ à la précision $\frac{1}{x}$.

Exercice 2. Développement généralisé en 0.

Déterminez le développement généralisé à l'ordre 1 au voisinage de 0 de la fonction réelle définie sur $]-\pi, \pi[\setminus \{0\}$ par

$$f(x) = \frac{\ln(1 + \tan(x))}{1 - \cos(x)}.$$

On rappelle pour cela que $\tan(h) = h + \frac{h^3}{3} + o(h^3)$.

Exercice 3. Asymptote et position relative.

Considérons la fonction f définie pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ par $f(x) = (x+1)e^{\frac{1}{x}}$.

- 1) Déterminez le développement généralisé de f au voisinage de $+\infty$ à la précision $\frac{1}{x^2}$.
- 2) Dédisez-en que la courbe représentative de f admet une asymptote en $+\infty$ dont vous préciserez l'équation. Déterminez ensuite la position relative de la courbe par rapport à son asymptote.

Exercice 4. Asymptote et position relative.

Considérons la fonction f définie pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = x(\ln(2x+1) - \ln(x))$.

- 1) Déterminez le développement généralisé de f au voisinage de $+\infty$ à la précision $\frac{1}{x}$.
- 2) Dédisez-en que la courbe représentative de f admet une asymptote en $+\infty$ dont vous préciserez l'équation. Déterminez ensuite la position relative de la courbe par rapport à son asymptote.