

Ordre et groupe symétrique

1 Ordre

Exercice 1. Ordres simples.

- 1) Calculez dans $\mathbb{C}^*$ l'ordre des éléments suivants : $1, -1, i, e^{i\frac{2\pi}{3}}, 2$.
- 2) Calculez dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ l'ordre des éléments suivants : $0, 3, 6$.
- 3) Calculez dans $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ l'ordre des éléments suivants : $1, 2, 3, 4, 6$.
- 4) Calculez dans $GL_2(\mathbb{R})$ l'ordre des éléments suivants :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2. Ordre et divisibilité.

Soient G un groupe fini et $x \in G$. On rappelle que l'ordre de x divise l'ordre de G .

- 1) En utilisant le résultat précédent, quels sont les ordres possibles des éléments du groupe $\mathbb{Z}/30\mathbb{Z}$?
- 2) Même question pour les éléments de $\mathbb{Z}/19\mathbb{Z}$ et de $\mathcal{P}(\{0, 1, 2\})$.
- 3) Que remarquez-vous en calculant les ordres de tous les éléments de $\mathcal{P}(\{0, 1, 2\})$?

Exercice 3. Groupes monogènes ou cycliques.

- 1) Vérifiez que $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ est un groupe cyclique.
- 2) On note $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}^\times$ l'ensemble $\{1, 3, 5, 7\}$ muni de la multiplication modulo 8. Vérifiez que $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}^\times$ n'est pas un groupe cyclique.
- 3) Est-ce que $\mathbb{Z}$ est un groupe monogène ? cyclique ?
- 4) Est-ce que $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ est un groupe monogène ? cyclique ?

2 Groupe symétrique

Exercice 4. Questions de compréhension.

- 1) Calculez dans $\mathfrak{S}_4$ les compositions suivantes :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

- 2) Calculez dans $\mathfrak{S}_6$ les inverses des éléments suivants :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 6 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 4 & 2 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5. Tables de Cayley.

- 1) Dressez la table de Cayley de la loi $\circ$ du groupe $\mathfrak{S}_2$.
- 2) Même question pour $\mathfrak{S}_3$.
- 3) Trouvez deux éléments dans $\mathfrak{S}_3$ qui ne commutent pas.

Exercice 6. Ordre de $\mathfrak{S}_n$.

Considérons le groupe $\mathfrak{S}_n$. Pour trouver l'ordre de ce groupe, nous allons compter le nombre de choix possibles pour construire une permutation σ dans $\mathfrak{S}_n$.

- 1) Combien de choix a-t-on pour l'image $\sigma(1)$?
- 2) Une fois que l'on a choisi $\sigma(1)$, combien de choix reste-t-il pour $\sigma(2)$?
- 3) Une fois que l'on a choisi $\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n-1)$, combien de choix reste-t-il pour $\sigma(n)$?
- 4) Déduisez-en le nombre d'éléments dans $\mathfrak{S}_n$.

Exercice 7. Points fixes et support.

Déterminez les ensembles $\text{Fix}(\sigma)$ et $\text{Supp}(\sigma)$ pour

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 10 & 7 & 3 & 6 & 9 & 1 & 2 & 8 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Exercice 8. Ça commute !

Trouvez deux permutations σ et τ dans $\mathfrak{S}_4$ qui commutent mais qui ont au moins un élément en commun dans leur support.

Exercice 9. Décomposition en produit de cycles.

Déterminez la décomposition en produit de cycles à supports disjoints de chacun des éléments de $\mathfrak{S}_{10}$ suivants.

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 1 & 3 & 7 & 4 & 6 & 8 & 9 & 2 & 5 & 10 \end{pmatrix}, & \sigma_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 3 & 6 & 7 & 10 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \\ \sigma_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 1 \end{pmatrix}, & \sigma_4 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 7 & 10 & 5 & 6 & 8 & 2 & 3 & 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Exercice 10. Jeu d'écriture.

Considérons la permutation σ dans $\mathfrak{S}_6$ définie pour tout i dans $\llbracket 1, 6 \rrbracket$ par $\sigma(i) = 7 - i$.

- 1) Écrivez σ sous forme matricielle.
- 2) Déterminez le support et l'ensemble des points fixes de σ .
- 3) Écrivez σ comme un produit de cycles à supports disjoints.

Exercice 11. Les groupes $\mathfrak{S}_3$ et $\mathfrak{S}_4$.

- 1) Déterminez tous les éléments de $\mathfrak{S}_3$ en les donnant sous forme d'un produit de cycles à supports disjoints.
- 2) Même question pour $\mathfrak{S}_4$.

Exercice 12. Puissances.

Pour chacune des permutations σ_i suivantes, calculez σ_i^{733} en utilisant sa décomposition en produit de cycles à supports disjoints.

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 6 & 1 & 2 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 13. Ordres possibles.

Rappelons les deux résultats suivants du cours.

- a. Soient G un groupe fini et $x \in G$. L'ordre de x divise l'ordre de G .
 - b. L'ordre de $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ est le plus petit multiple commun des longueurs des cycles γ_i de sa décomposition.
- 1) D'après le premier résultat, quels sont les ordres possibles pour les éléments de $\mathfrak{S}_3$? Même question avec $\mathfrak{S}_4$.
 - 2) D'après le second résultat, quels sont les ordres des éléments de $\mathfrak{S}_3$? Même question avec $\mathfrak{S}_4$ puis $\mathfrak{S}_5$.