

Espaces vectoriels

1 Espaces vectoriels

Exercice 1. Espace vectoriel ou pas ?

Les ensembles suivants sont-ils des $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels ? Si non, donnez un axiome qui ne s'y applique pas.

- 1) $\mathbb{R}[X]$.
- 2) $\mathbb{R}_{=2}[X] = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid \deg(P) = 2\}$.
- 3) $\mathbb{R}_{\leq 2}[X] = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid \deg(P) \leq 2\}$.
- 4) $\mathbb{R}_{=2}[X] \cup \{0\}$.

Exercice 2. La somme n'est qu'un produit comme un autre.

On définit sur $\mathbb{R}_+^*$ une loi interne notée $\oplus$ telle que pour tous éléments x et y de $\mathbb{R}_+^*$ on ait $x \oplus y = xy$. On définit également une loi externe notée $\odot$ telle que pour tout scalaire λ dans $\mathbb{R}$ et pour tout élément x de $\mathbb{R}_+^*$ on ait $\lambda \odot x = x^\lambda$. Montrez que $(\mathbb{R}_+^*, \oplus, \odot)$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

Exercice 3. Rappels.

Pour tous les couples d'ensembles (E, F) suivants, déterminez si F est un sous-espace vectoriel de E .

- 1) $E = \mathbb{R}^3$ et $F = \mathbb{R}^2$.
- 2) $E = \mathbb{R}$ et $F = \mathbb{Z}$.
- 3) $E = \mathbb{R}^2$ et $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0\}$.

Exercice 4. Suites réelles.

Considérons le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des suites réelles. Indiquez pour chaque sous-ensemble de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ suivant s'il s'agit d'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

- 1) L'ensemble F des suites convergentes.
- 2) L'ensemble F des suites divergentes.
- 3) L'ensemble F des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 5. Espace des applications réelles.

On considère le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrez que chacun des ensembles suivants n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ en donnant un contre-exemple.

- 1) L'ensemble F des applications positives.
- 2) L'ensemble F des applications croissantes sur $\mathbb{R}$.
- 3) L'ensemble F des applications ayant $+\infty$ pour limite en $+\infty$.
- 4) L'ensemble F des applications telles que $f(0) = 1$.

Montrez que chacun des ensembles suivants est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

- 5) L'ensemble F des applications paires.
- 6) L'ensemble F des applications ayant 0 pour limite en $+\infty$.
- 7) L'ensemble F des applications telles que $f(0) = 0$.

8) L'ensemble F des applications telles que $f(0) = f(1) = 0$.

9) L'ensemble F des fonctions constantes à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Exercice 6. Matrices.

Considérons l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices carrées réelles de dimension $n \times n$. Pour chacun des sous-ensembles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ suivants, indiquez s'il s'agit ou non d'un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On rappelle que la trace d'une matrice est la somme de ces coefficients diagonaux.

- 1) L'ensemble des matrices diagonales.
- 2) L'ensemble des matrices triangulaires supérieures.
- 3) L'ensemble des matrices dont la trace vaut 0.
- 4) L'ensemble des matrices dont la trace vaut 2.
- 5) L'ensemble des matrices symétriques.

2 Espaces de dimension finie

Exercice 7. Générateurs.

Pour chacun des espaces vectoriels suivants, donnez une partie génératrice.

- | | |
|---|---|
| 1) Le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathbb{R}$. | 4) Le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathbb{C}^2$. |
| 2) Le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathbb{R}^2$. | 5) Le $\mathbb{C}$ -espace vectoriel $\mathbb{C}$. |
| 3) Le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathbb{C}$. | 6) Le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathbb{R}_{\leq 2}[X]$. |

Exercice 8. Sous-espaces inclus.

On considère les quatre vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivants :

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u' = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Montrez que $\text{Vect}(u, v)$ est un sous-espace vectoriel de $\text{Vect}(u', v')$.

Exercice 9. Familles libres ou liées.

Pour chacune des familles suivantes, indiquez si la famille est liée ou libre dans le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel E en justifiant votre réponse.

- 1) $E = \mathbb{R}^2$ et $\mathcal{F} = ((-1, 1), (-2, 2))$.
- 2) $E = \mathbb{R}^2$ et $\mathcal{F} = ((0, 0), (1, 0), (0, 1))$.
- 3) $E = \mathbb{R}^3$ et $\mathcal{F} = ((1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2))$.
- 4) $E = \mathbb{R}^3$ et $\mathcal{F} = ((1, 1, 0), (3, 1, 3), (2, -1, 0))$.
- 5) $E = \mathbb{R}[X]$ et $\mathcal{F} = (X^2 + 1, X, 1)$.

Exercice 10. Familles de polynômes.

On se place dans le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ muni des lois usuelles. On considère les polynômes P_1 , P_2 , P_3 et P_4 définis par

$$\begin{aligned} P_1(X) &= X(X-1)(X-2), & P_3(X) &= X(X-1)(X-3), \\ P_2(X) &= X(X-2)(X-3), & P_4(X) &= (X-1)(X-2)(X-3). \end{aligned}$$

Montrez que la famille (P_1, P_2, P_3, P_4) est libre.

Exercice 11. Familles de fonctions.

On se place dans le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ muni des lois usuelles. On considère les fonctions f_1, f_2 et f_3 définies pour tout réel x par $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = \cos(x)$, $f_3(x) = \sin(x)$. Montrez que la famille (f_1, f_2, f_3) est libre.

Exercice 12. Bases d'espaces vectoriels.

Donnez une base des espaces vectoriels suivants.

- 1) Le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathbb{C}^2$.
- 2) Le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.
- 3) Le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathbb{C}_{\leq 2}[X]$.
- 4) Le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 13. Bases de sous-espaces.

Donnez une base de chacun des $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels suivants.

$$\begin{aligned} F_1 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = z\}, & F_3 &= \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(0) = 0 \text{ et } P'(0) = 0\}, \\ F_2 &= \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2 \right\}, & F_4 &= \left\{ \begin{pmatrix} x & 2x - y \\ y & x + 2y \end{pmatrix} \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2 \right\}. \end{aligned}$$

Exercice 14. Rang de familles.

Déterminer le rang de chacune des famille de vecteurs de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$.

- 1) $\mathcal{F}_1 = ((1, 0, 0))$
- 2) $\mathcal{F}_2 = ((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$
- 3) $\mathcal{F}_3 = ((1, 1, 1), (2, 3, -1), (4, 5, 1))$
- 4) $\mathcal{F}_4 = ((0, 1, 1), (1, 1, 1), (-1, 1, 2), (1, 2, 0))$