

Espaces euclidiens

Exercice 1. Formes bilinéaires ?

1) L'addition $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (u, v) \mapsto u + v$ est-elle une forme bilinéaire sur $\mathbb{R}$?

Correction. On remarque que

$$\phi(1+1, 1) = (1+1) + 1 = 3 \quad \neq \quad \phi(1, 1) + \phi(1, 1) = (1+1) + (1+1) = 4.$$

Par conséquent, l'addition n'est pas une forme bilinéaire sur $\mathbb{R}$.

2) Le produit $\psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (u, v) \mapsto u \times v$ est-il une forme bilinéaire sur $\mathbb{R}$?

Correction. Montrons maintenant que la multiplication est une forme bilinéaire. Soient u, v, w dans $\mathbb{R}$ et λ un scalaire. On a

$$\begin{aligned} \psi(\lambda u + v, w) &= (\lambda u + v)w = \lambda uw + vw = \lambda \psi(u, w) + \psi(v, w), \\ \psi(u, \lambda v + w) &= u(\lambda v + w) = \lambda uv + uw = \lambda \psi(u, v) + \psi(u, w). \end{aligned}$$

Exercice 2. Calculs de produits scalaires.

Dans chacune des questions suivantes, on considère un espace euclidien E ainsi que trois vecteurs u, v et w dans E . Calculez $\langle u | v \rangle$, $\langle u | w \rangle$ et $\langle v | w \rangle$.

1) On considère l'espace euclidien $E = \mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel ainsi que les vecteurs $u = (1, 1, 1)$, $v = (-1, 0, 1)$ et $w = (1, 2, 3)$.

Correction. On a

$$\begin{aligned} \langle u | v \rangle &= 1 \times (-1) + 1 \times 0 + 1 \times 1 = 0, \\ \langle u | w \rangle &= 1 \times 1 + 1 \times 2 + 1 \times 3 = 6, \\ \langle v | w \rangle &= -1 \times 1 + 0 \times 2 + 1 \times 3 = 2. \end{aligned}$$

2) On considère l'espace euclidien $E = \mathbb{R}_2[X]$ muni du produit scalaire défini pour tous P et Q dans $\mathbb{R}_2[X]$ par

$$\langle P | Q \rangle = P(0) \times Q(0) + P(1) \times Q(1)$$

ainsi que les vecteurs $u = X + 1$, $v = X^2 - X + 1$ et $w = 1 - 2X$.

Correction. On a

$$\begin{aligned} \langle u | v \rangle &= 1 \times 1 + 2 \times 1 = 3, \\ \langle u | w \rangle &= 1 \times 1 + 2 \times (-1) = -1, \\ \langle v | w \rangle &= 1 \times 1 + 1 \times (-1) = 0. \end{aligned}$$

- 3) On considère l'espace euclidien $E = \mathbb{R}_2[X]$ muni du produit scalaire défini pour tous P et Q dans $\mathbb{R}_2[X]$ par

$$\langle P | Q \rangle = \int_0^1 P(x)Q(x)dx$$

ainsi que les vecteurs $u = X + 1$, $v = X^2 - X + 1$ et $w = 1 - 2X$.

Correction. On a

$$\begin{aligned}\langle u | v \rangle &= \int_0^1 (x+1)(x^2-x+1)dx = \int_0^1 (x^3+1)dx = \left[\frac{1}{4}x^4 + x \right]_0^1 = \frac{5}{4}, \\ \langle u | w \rangle &= \int_0^1 (x+1)(1-2x)dx = \int_0^1 (-2x^2-x+1)dx = \left[-\frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x \right]_0^1 = -\frac{1}{6}, \\ \langle v | w \rangle &= \int_0^1 (x^2-x+1)(1-2x)dx = \int_0^1 (-2x^3+3x^2-3x+1)dx \\ &= \left[-\frac{2}{4}x^4 + x^3 - \frac{3}{2}x^2 + x \right]_0^1 = 0.\end{aligned}$$

Exercice 3. Produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^2$.

On considère l'application $\varphi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie pour tous $u = (u_1, u_2)$ et $v = (v_1, v_2)$ dans $\mathbb{R}^2$ par

$$\varphi(u, v) = u_1v_1 + u_2v_2.$$

Montrez que φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

Correction. Il s'agit de montrer que φ est une forme bilinéaire symétrique, définie et positive.

- **Bilinéaire.** Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $u = (u_1, u_2)$, $v = (v_1, v_2)$ et $w = (w_1, w_2)$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^2$. On a

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda u + v, w) &= \varphi((\lambda u_1 + v_1, \lambda u_2 + v_2), (w_1, w_2)) \\ &= (\lambda u_1 + v_1)w_1 + (\lambda u_2 + v_2)w_2 = \lambda u_1w_1 + v_1w_1 + \lambda u_2w_2 + v_2w_2 \\ &= \lambda(u_1w_1 + u_2w_2) + v_1w_1 + v_2w_2 = \lambda\varphi(u, w) + \varphi(v, w).\end{aligned}$$

Une démonstration similaire nous donne $\varphi(u, \lambda v + w) = \lambda\varphi(u, v) + \varphi(u, w)$.

- **Symétrique.** Soient $u = (u_1, u_2)$ et $v = (v_1, v_2)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$. On a

$$\varphi(u, v) = u_1v_1 + u_2v_2 = v_1u_1 + v_2u_2 = \varphi(v, u).$$

- **Définie.** Soit $u = (u_1, u_2)$ un élément de $\mathbb{R}^2$ tel que $\varphi(u, u) = 0$. On a alors

$$\varphi(u, u) = u_1^2 + u_2^2 = 0 \Leftrightarrow u_1^2 = -u_2^2.$$

Or, $x^2 \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ donc $u_1 = u_2 = 0$.

- **Positive.** Soit $u = (u_1, u_2)$ un élément de $\mathbb{R}^2$. On a

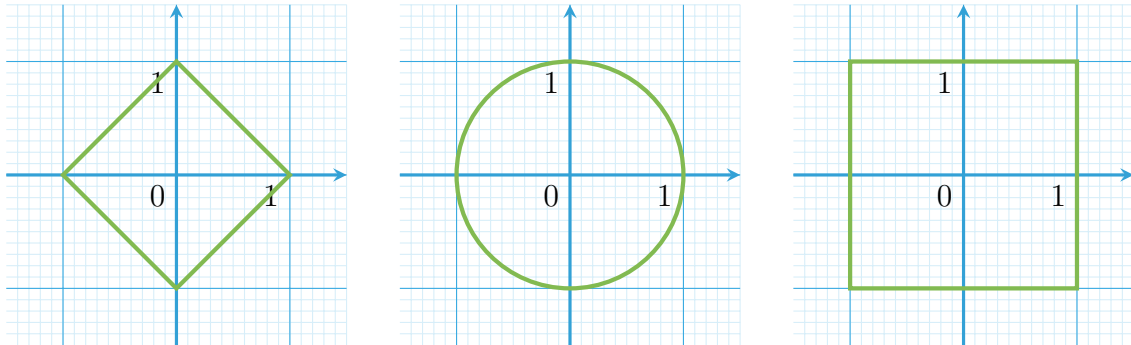
$$\varphi(u, u) = u_1^2 + u_2^2 \geq 0.$$

Exercice 4. Cercles unités.

On considère les normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sur $\mathbb{R}^2$ définies pour tout $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ par

$$\|u\|_1 = |x| + |y|, \quad \|u\|_2 = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \|u\|_\infty = \max(|x|, |y|).$$

Pour chacune des normes précédentes, dessinez l'ensemble des vecteurs de norme 1.

**Exercice 5. Propriétés d'une norme.**

Soit E un espace euclidien muni d'un produit scalaire $\langle \cdot | \cdot \rangle$. La norme euclidienne associée sera notée $\|\cdot\|$. Montrez que pour tous vecteurs u et v de E et pour tout scalaire λ de $\mathbb{R}$,

- 1) $\|\lambda u\| = |\lambda| \times \|u\|$;
- 2) $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + 2\langle u | v \rangle + \|v\|^2$;
- 3) $\|u - v\|^2 = \|u\|^2 - 2\langle u | v \rangle + \|v\|^2$;
- 4) $\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2)$ (identité du parallélogramme) ;
- 5) $\|u + v\|^2 - \|u - v\|^2 = 4\langle u | v \rangle$ (identité de polarisation).

Correction. Soient u, v deux vecteurs de E et λ un scalaire. On a

$$\begin{aligned} \|\lambda u\| &= \sqrt{\langle \lambda u | \lambda u \rangle} = \sqrt{\lambda \times \lambda \langle u | u \rangle} = \sqrt{\lambda^2} \times \sqrt{\langle u | u \rangle} = |\lambda| \times \|u\|, \\ \|u + v\|^2 &= \sqrt{\langle u + v | u + v \rangle}^2 = \langle u + v | u + v \rangle = \langle u | u + v \rangle + \langle v | u + v \rangle \\ &= \langle u | u \rangle + \langle u | v \rangle + \langle v | u \rangle + \langle v | v \rangle = \|u\|^2 + 2\langle u | v \rangle + \|v\|^2, \\ \|u - v\|^2 &= \sqrt{\langle u - v | u - v \rangle}^2 = \langle u - v | u - v \rangle = \langle u | u - v \rangle - \langle v | u - v \rangle \\ &= \langle u | u \rangle - \langle u | v \rangle - (\langle v | u \rangle - \langle v | v \rangle) = \|u\|^2 - 2\langle u | v \rangle + \|v\|^2. \end{aligned}$$

Pour obtenir les égalités des questions 4 et 5, il suffit d'additionner/soustraire les égalités des questions 3 et 4.

Exercice 6. Calculs de normes.

- 1) On considère l'espace euclidien $E = \mathbb{R}^2$ muni des produits scalaires φ_1 et φ_2 définis pour tous vecteurs $u = (u_1, u_2)$ et $v = (v_1, v_2)$ par

$$\varphi_1(u, v) = u_1 v_1 + u_2 v_2, \quad \varphi_2(u, v) = u_1 v_1 + \frac{u_1 v_2 + u_2 v_1}{2} + u_2 v_2.$$

On note $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ les normes euclidiennes associées. Calculez les normes des vecteurs suivants :

$$(1, 1), \quad (1, -1), \quad (1, 0), \quad \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1).$$

Correction.

$$\begin{aligned}
\|(1, 1)\|_1 &= \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}, & \|(1, 1)\|_2 &= \sqrt{1^2 + 1 + 1^2} = \sqrt{3}, \\
\|(1, -1)\|_1 &= \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}, & \|(1, -1)\|_2 &= \sqrt{1^2 - 1 + (-1)^2} = 1, \\
\|(1, 0)\|_1 &= \sqrt{1^2 + 0^2} = 1, & \|(1, 0)\|_2 &= \sqrt{1^2 + 0 + 0^2} = 1, \\
\left\|\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)\right\|_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}\|(1, 1)\|_1 = 1, & \left\|\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)\right\|_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}\|(1, 1)\|_2 = \sqrt{\frac{3}{2}},
\end{aligned}$$

- 2) On considère l'espace euclidien $E = \mathbb{R}[X]$ muni des produits scalaires φ_1 et φ_2 définis pour tous P et Q dans $\mathbb{R}[X]$ par

$$\varphi_1(P, Q) = \sum_{x=-1}^1 P(x)Q(x), \quad \varphi_2(P, Q) = \int_{-1}^1 P(x)Q(x)dx.$$

On note $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ les normes euclidiennes associées. Calculez les normes des polynômes suivants :

$$1, \quad X, \quad X^2, \quad X^3, \quad X+1.$$

Correction. Pour simplifier les calculs, nous calculerons les normes au carré des polynômes donnés.

$$\begin{aligned}
\left\{ \begin{aligned} (\|1\|_1)^2 &= 1^2 + 1^2 + 1^2 = 3, \\ (\|1\|_2)^2 &= \int_{-1}^1 1dx = 2, \end{aligned} \right. & \left\{ \begin{aligned} (\|X\|_1)^2 &= (-1)^2 + 0^2 + 1^2 = 2, \\ (\|X\|_2)^2 &= \int_{-1}^1 x^2dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^1 = \frac{2}{3}, \end{aligned} \right. \\
\left\{ \begin{aligned} (\|X^2\|_1)^2 &= 1^2 + 0^2 + 1^2 = 2, \\ (\|X^2\|_2)^2 &= \int_{-1}^1 x^4dx = \left[\frac{1}{5}x^5\right]_{-1}^1 = \frac{2}{5}, \end{aligned} \right. & \left\{ \begin{aligned} (\|X^3\|_1)^2 &= (-1)^2 + 0^2 + 1^2 = 2, \\ (\|X^3\|_2)^2 &= \int_{-1}^1 x^6dx = \left[\frac{1}{7}x^7\right]_{-1}^1 = \frac{2}{7}, \end{aligned} \right. \\
\left\{ \begin{aligned} (\|X+1\|_1)^2 &= 0^2 + 1^2 + 2^2 = 5, \\ (\|X+1\|_2)^2 &= \int_{-1}^1 (x^2 + 2x + 1)dx = \left[\frac{1}{3}x^3 + x^2 + x\right]_{-1}^1 = \frac{8}{3}. \end{aligned} \right.
\end{aligned}$$

Exercice 7. Le cas du vecteur nul.

Montrez que le vecteur nul est orthogonal à tout vecteur.

Correction. Soit u un vecteur de E . Une forme bilinéaire est linéaire selon chacune de ses composantes. Autrement dit, l'application $E \rightarrow \mathbb{R}, v \mapsto \langle u | v \rangle$ est linéaire, donc envoie le vecteur nul sur zéro. Ainsi, $\langle u | 0 \rangle = 0$.

Exercice 8. Familles orthogonales.

On considère l'espace euclidien $\mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire usuel. Tracez les couples de vecteurs suivants dans un repère orthonormé et indiquez s'ils forment une famille orthogonale, orthonormale ou aucun des deux.

$$\begin{aligned}
(u_1, u_2) &= ((1, 1), (1, 0)), & (u_3, u_4) &= ((1, 1), (1, -1)), \\
(u_5, u_6) &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1), \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1) \right).
\end{aligned}$$

Correction. On remarque que $\|u_1\| = \|u_3\| = \sqrt{2}$, donc les familles (u_1, u_2) et (u_3, u_4) ne sont pas normées. En revanche,

$$\|u_5\| = \|u_6\| = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{\pm 1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = 1.$$

Aussi, la famille (u_5, u_6) est normée. On calcule ensuite

$$\langle u_1 | u_2 \rangle = 1 \times 1 + 1 \times 0 = 1, \quad \langle u_3 | u_4 \rangle = 1 \times 1 + 1 \times (-1) = 0, \quad \langle u_5 | u_6 \rangle = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0.$$

Par conséquent, la famille (u_3, u_4) est orthogonale et (u_5, u_6) est orthonormale.

Exercice 9. Théorème de Pythagore.

Soit E un espace euclidien.

1) Montrez que pour tous vecteurs u et v dans E , on a

$$\langle u | v \rangle = 0 \iff \|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2.$$

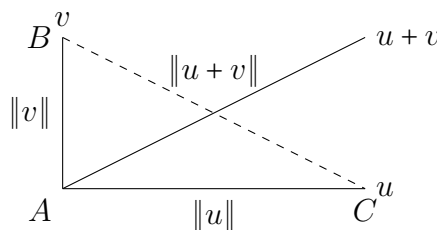
Pensez à utiliser les propriétés des normes démontrées précédemment.

Correction. Soient u et v dans E . On sait que $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + 2\langle u | v \rangle + \|v\|^2$. Par conséquent,

$$\begin{aligned} \|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 &\iff (\|u\|^2 + 2\langle u | v \rangle + \|v\|^2) = \|u\|^2 + \|v\|^2 \\ &\iff 2\langle u | v \rangle = 0 \iff \langle u | v \rangle = 0 \end{aligned}$$

2) Réécrivez le résultat précédent pour l'espace $E = \mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire usuel.

Correction.



On retrouve le théorème de Pythagore (et sa réciproque) disant que le triangle ABC est rectangle en A si et seulement si $AB^2 + AC^2 = BC^2$.

Exercice 10. Orthogonal d'une partie.

Soit E un espace euclidien. Démontrez que l'orthogonal d'une partie A de E est un sous-espace vectoriel de E .

Correction. Soient u et v dans $A^\perp$ et λ un scalaire réel. Montrons que $\lambda u + v$ appartient à $A^\perp$, autrement dit que pour tout $a \in A$, on a $(\lambda u + v) \perp a$. Soit $a \in A$. On a

$$\langle \lambda u + v | a \rangle = \langle \lambda u | a \rangle + \langle v | a \rangle = \lambda \langle u | a \rangle + \langle v | a \rangle$$

Or, u et v appartiennent à $A^\perp$, donc $\langle u | a \rangle = \langle v | a \rangle = 0$. Par conséquent, $\langle \lambda u + v | a \rangle = 0$. Nous venons de montrer que $\lambda u + v \in A^\perp$ et donc que $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E .

Exercice 11. Orthogonal d'un sous-espace.

Considérons l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel.

- 1) Déterminez une base de l'orthogonal de $F = \text{Vect}((1, 1, 1))$.

Correction. On a

$$\begin{aligned}\text{Vect}((1, 1, 1))^\perp &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \langle (x, y, z) \mid (1, 1, 1) \rangle = 0\} \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = -y - z\} \\ &= \{(-y - z, y, z) \mid y, z \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}((-1, 1, 0), (-1, 0, 1)).\end{aligned}$$

Par conséquent, $\mathcal{B} = ((-1, 1, 0), (-1, 0, 1))$ est une base de l'orthogonal de F .

- 2) Déterminez une base de l'orthogonal de $F = \text{Vect}((1, 0, -1), (1, 2, 1))$.

Correction. Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On a

$$u \in F^\perp \iff \begin{cases} \langle u \mid (1, 0, -1) \rangle = 0 \\ \langle u \mid (1, 2, 1) \rangle = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x - z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On est donc ramené à déterminer le noyau d'une matrice que l'on peut calculer à l'aide du pivot de Gauss.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}F^\perp &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - z = 0 \text{ et } y + z = 0\} \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = z \text{ et } y = -z\} = \{(z, -z, z) \mid z \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}((1, -1, 1)).\end{aligned}$$

- 3) Déterminez *sans calcul* une base de l'orthogonal de $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x - 7y + \pi z = 0\}$.

Correction. On a

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \langle (3, 7, \pi) \mid (x, y, z) \rangle = 0\} = \text{Vect}((3, 7, \pi))^\perp.$$

Par conséquent, $F^\perp = (\text{Vect}((3, 7, \pi))^\perp)^\perp = \text{Vect}((3, 7, \pi))$ et donc la famille $((3, 7, \pi))$ est une base de $F^\perp$.

Exercice 12. Orthonormalisation.

Orthonormalisez chacune des bases suivantes.

- 1) Orthonormalisez la base $\mathcal{B} = ((1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1))$ de $\mathbb{R}^3$.

Correction. On retourne la base canonique.

- 2) Sur $\mathbb{R}^3$, orthonormalisez $\mathcal{B} = ((1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0))$.

Correction. On trouve

$$\mathcal{B}' = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1), \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, -2), \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0) \right).$$

En comparant ce résultat avec la question précédente, on remarque que l'ordre des vecteurs de la base initiale influence la base orthonormale obtenue avec l'algorithme de Gram-Schmidt.

3) Sur $\mathbb{R}^3$, orthonormalisez une base du plan d'équation P défini par $3x - y + 2z = 0$.

Correction. Une base de P est $((1, 3, 0), (0, 2, 1))$. On trouve ensuite

$$\mathcal{B}' = \left(\frac{1}{\sqrt{10}}(1, 3, 0), \frac{1}{\sqrt{35}}(-3, 1, 5) \right).$$

Exercice 13. Endomorphisme orthogonal.

On considère l'endomorphisme orthogonal f de $\mathbb{R}^2$ défini par sa matrice exprimée dans la base canonique $\mathcal{C}$:

$$[f]_{\mathcal{C}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ 1 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Vérifiez que f préserve le produit scalaire ainsi que les normes de $u = (0, 1)$ et $v = (3, 4)$.

Correction. On commence par calculer les images de u et v par f .

$$f(u) = \frac{1}{2}(1, -\sqrt{3}), \quad f(v) = \frac{1}{2}(3\sqrt{3} + 4, 3 - 4\sqrt{3}).$$

D'une part, on obtient $\langle u | v \rangle = 4$, $\|u\| = 1$ et $\|v\| = 5$. D'autre part,

$$\begin{aligned} \langle f(u) | f(v) \rangle &= \frac{1}{4}((3\sqrt{3} + 4) - \sqrt{3}(3 - 4\sqrt{3})) = \frac{1}{4}(3\sqrt{3} + 4 - 3\sqrt{3} + 12) = 4, \\ \|f(u)\| &= \frac{1}{2}\sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = 1, \\ \|f(v)\| &= \frac{1}{2}\sqrt{(3\sqrt{3} + 4)^2 + (3 - 4\sqrt{3})^2} = \frac{1}{2}\sqrt{27 + 24\sqrt{3} + 16 + 9 - 24\sqrt{3} + 48} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{100} = \frac{1}{2} \times 10 = 5. \end{aligned}$$

Exercice 14. Matrices orthogonales.

Montrez que les matrices suivantes à coefficients dans $\mathbb{R}$ sont orthogonales.

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ 1 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}, \quad B = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Correction. Il suffit de vérifier que $A \times A^T = \text{Id}_2$ et $B \times B^T = \text{Id}_3$.

Exercice 15. Matrices de rotation.

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Montrez que la matrice R_θ de rotation d'angle θ du plan $\mathbb{R}^2$ est une matrice orthogonale.

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Correction. On remarque que

$$\begin{aligned} (R_\theta) \times (R_\theta)^T &= \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (\cos \theta)^2 + (-\sin \theta)^2 & \cos \theta \sin \theta - \sin \theta \cos \theta \\ \sin \theta \cos \theta - \cos \theta \sin \theta & (\cos \theta)^2 + (\sin \theta)^2 \end{pmatrix} = \text{Id}_2. \end{aligned}$$

Exercice 16. Orthodiagonalisation.

Diagonalisez chacune des matrices suivantes dans une base orthonormée de vecteurs propres. Donnez pour chacune d'entre elles les matrices de passage.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & -8 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Correction (matrice A). Le polynôme caractéristique de A est $P_A(X) = (X+9)(X-1)$. Les sous-espaces propres sont donnés par

$$E_1 = \text{Vect}((3, 1)), \quad E_{-9} = \text{Vect}((1, -3)).$$

On vérifie facilement que les sous-espaces E_1 et E_{-9} sont orthogonaux. Il suffit juste ici de normaliser les bases propres pour obtenir la base orthogonale suivante

$$\mathcal{B} = \left(\frac{1}{\sqrt{10}}(3, 1), \frac{1}{\sqrt{10}}(1, -3) \right).$$

En notant $\mathcal{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$, on a donc

$$[A]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -9 \end{pmatrix}, \quad P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad P_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = (P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}})^{\top} = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}.$$

Correction (matrice B). On commence par calculer le polynôme caractéristique de B ainsi qu'une base pour chaque sous-espace propre. On trouve

$$P_B(X) = X^2(3 - X), \quad E_0 = \text{Vect}((-1, 1, 0), (-1, 0, 1)), \quad E_3 = \text{Vect}((1, 1, 1)).$$

On vérifie que les sous-espaces E_0 et E_3 sont orthogonaux. On applique ensuite l'algorithme de Gram-Schmidt sur chacune des bases propres. On obtient

$$\mathcal{B}_0 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1, 0), \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, -2) \right), \quad \mathcal{B}_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1) \right).$$

En posant $\mathcal{B} = \mathcal{B}_0 \cup \mathcal{B}_3$ et en notant $\mathcal{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ on obtient

$$[B]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}, \quad P_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

Correction (matrice C). On obtient $\text{Sp}(C) = \{0, 3, -3\}$ puis on trouve

$$E_0 = \text{Vect}((-2, 2, 1)), \quad E_3 = \text{Vect}((2, 1, 2)), \quad E_{-3} = \text{Vect}((-1, -2, 2)), \\ \mathcal{B}_0 = \left(\frac{1}{3}(-2, 2, 1) \right), \quad \mathcal{B}_3 = \left(\frac{1}{3}(2, 1, 2) \right), \quad \mathcal{B}_{-3} = \left(\frac{1}{3}(-1, -2, 2) \right).$$

En posant $\mathcal{B} = \mathcal{B}_0 \cup \mathcal{B}_3 \cup \mathcal{B}_{-3}$ et en notant $\mathcal{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ on obtient

$$[C]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad P_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Correction (matrice D). On obtient $\text{Sp}(C) = \{0, 3, -3\}$ puis on trouve

$$\begin{aligned} E_1 &= \text{Vect}((1, 1, 1)), & E_2 &= \text{Vect}((0, -1, 1)), & E_4 &= \text{Vect}((-2, 1, 1)), \\ \mathcal{B}_1 &= \left(\frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1) \right), & \mathcal{B}_2 &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(0, -1, 1) \right), & \mathcal{B}_4 &= \left(\frac{1}{\sqrt{6}}(-2, 1, 1) \right). \end{aligned}$$

En posant $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \mathcal{B}_4$ et en notant $\mathcal{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ on obtient

$$[D]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}, \quad P_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$