

Espaces euclidiens

Exercice 1. Formes bilinéaires ?

- 1) L'addition $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (u, v) \mapsto u + v$ est-elle une forme bilinéaire sur $\mathbb{R}$?
- 2) Le produit $\psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (u, v) \mapsto u \times v$ est-il une forme bilinéaire sur $\mathbb{R}$?

Exercice 2. Calculs de produits scalaires.

Dans chacune des questions suivantes, on considère un espace euclidien E ainsi que trois vecteurs u, v et w dans E . Calculez $\langle u | v \rangle$, $\langle u | w \rangle$ et $\langle v | w \rangle$.

- 1) On considère l'espace euclidien $E = \mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel ainsi que les vecteurs $u = (1, 1, 1)$, $v = (-1, 0, 1)$ et $w = (1, 2, 3)$.
- 2) On considère l'espace euclidien $E = \mathbb{R}_2[X]$ muni du produit scalaire défini pour tous P et Q dans $\mathbb{R}_2[X]$ par

$$\langle P, Q \rangle = P(0) \times Q(0) + P(1) \times Q(1)$$

ainsi que les vecteurs $u = X + 1$, $v = X^2 - X + 1$ et $w = 1 - 2X$.

- 3) On considère l'espace euclidien $E = \mathbb{R}_2[X]$ muni du produit scalaire défini pour tous P et Q dans $\mathbb{R}_2[X]$ par

$$\langle P | Q \rangle = \int_0^1 P(x)Q(x)dx$$

ainsi que les vecteurs $u = X + 1$, $v = X^2 - X + 1$ et $w = 1 - 2X$.

Exercice 3. Produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^2$.

On considère l'application $\varphi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie pour tous $u = (u_1, u_2)$ et $v = (v_1, v_2)$ dans $\mathbb{R}^2$ par

$$\varphi(u, v) = u_1v_1 + u_2v_2.$$

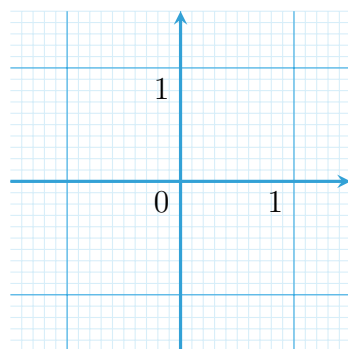
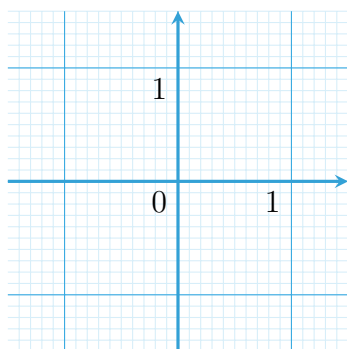
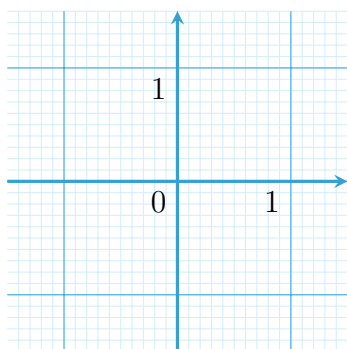
Montrez que φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 4. Cercles unités.

On considère les normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sur $\mathbb{R}^2$ définies pour tout $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ par

$$\|u\|_1 = |x| + |y|, \quad \|u\|_2 = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \|u\|_\infty = \max(|x|, |y|).$$

Pour chacune des normes précédentes, dessinez l'ensemble des vecteurs de norme 1.



Exercice 5. Propriétés d'une norme.

Soit E un espace euclidien muni d'un produit scalaire $\langle \cdot | \cdot \rangle$. La norme euclidienne associée sera notée $\|\cdot\|$. Montrez que pour tous vecteurs u et v de E et pour tout scalaire λ de $\mathbb{R}$,

- 1) $\|\lambda u\| = |\lambda| \times \|u\|$;
- 2) $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + 2\langle u | v \rangle + \|v\|^2$;
- 3) $\|u - v\|^2 = \|u\|^2 - 2\langle u | v \rangle + \|v\|^2$;
- 4) $\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2)$ (identité du parallélogramme) ;
- 5) $\|u + v\|^2 - \|u - v\|^2 = 4\langle u | v \rangle$ (identité de polarisation).

Exercice 6. Calculs de normes.

- 1) On considère l'espace euclidien $E = \mathbb{R}^2$ muni des produits scalaires φ_1 et φ_2 définis pour tous vecteurs $u = (u_1, u_2)$ et $v = (v_1, v_2)$ par

$$\varphi_1(u, v) = u_1v_1 + u_2v_2, \quad \varphi_2(u, v) = u_1v_1 + \frac{u_1v_2 + u_2v_1}{2} + u_2v_2.$$

On note $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ les normes euclidiennes associées. Calculez les normes des vecteurs suivants :

$$(1, 1), \quad (1, -1), \quad (1, 0), \quad \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1).$$

- 2) On considère l'espace euclidien $E = \mathbb{R}[X]$ muni des produits scalaires φ_1 et φ_2 définis pour tous P et Q dans $\mathbb{R}[X]$ par

$$\varphi_1(P, Q) = \sum_{x=-1}^1 P(x)Q(x), \quad \varphi_2(P, Q) = \int_{-1}^1 P(x)Q(x)dx.$$

On note $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ les normes euclidiennes associées. Calculez les normes des polynômes suivants :

$$1, \quad X, \quad X^2, \quad X^3, \quad X + 1.$$

Exercice 7. Le cas du vecteur nul.

Montrez que le vecteur nul est orthogonal à tout vecteur.

Exercice 8. Familles orthogonales.

On considère l'espace euclidien $\mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire usuel. Tracez les couples de vecteurs suivants dans un repère orthonormé et indiquez s'ils forment une famille orthogonale, orthonormale ou aucun des deux.

$$(u_1, u_2) = ((1, 1), (1, 0)), \quad (u_3, u_4) = ((1, 1), (1, -1)), \\ (u_5, u_6) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1), \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1) \right).$$

Exercice 9. Théorème de Pythagore.

Soit E un espace euclidien.

- 1) Montrez que pour tous vecteurs u et v dans E , on a

$$\langle u | v \rangle = 0 \iff \|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2.$$

Pensez à utiliser les propriétés des normes démontrées précédemment.

- 2) Réécrivez le résultat précédent pour l'espace $E = \mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire usuel.

Exercice 10. Orthogonal d'une partie.

Soit E un espace euclidien. Démontrez que l'orthogonal d'une partie A de E est un sous-espace vectoriel de E .

Exercice 11. Orthogonal d'un sous-espace.

Considérons l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel.

- 1) Déterminez une base de l'orthogonal de $F = \text{Vect}((1, 1, 1))$.
- 2) Déterminez une base de l'orthogonal de $F = \text{Vect}((1, 0, -1), (1, 2, 1))$.
- 3) Déterminez *sans calcul* une base de l'orthogonal de $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x - 7y + \pi z = 0\}$.

Exercice 12. Orthonormalisation.

Orthonormalisez chacune des bases suivantes.

- 1) Orthonormalisez la base $\mathcal{B} = ((1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1))$ de $\mathbb{R}^3$.
- 2) Sur $\mathbb{R}^3$, orthonormalisez $\mathcal{B} = ((1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0))$.
- 3) Sur $\mathbb{R}^3$, orthonormalisez une base du plan d'équation P défini par $3x - y + 2z = 0$.

Exercice 13. Endomorphisme orthogonal.

On considère l'endomorphisme orthogonal f de $\mathbb{R}^2$ défini par sa matrice exprimée dans la base canonique $\mathcal{C}$:

$$[f]_{\mathcal{C}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ 1 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Vérifiez que f préserve le produit scalaire ainsi que les normes de $u = (0, 1)$ et $v = (3, 4)$.

Exercice 14. Matrices orthogonales.

Montrez que les matrices suivantes à coefficients dans $\mathbb{R}$ sont orthogonales.

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ 1 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}, \quad B = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 15. Matrices de rotation.

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Montrez que la matrice R_θ de rotation d'angle θ du plan $\mathbb{R}^2$ est une matrice orthogonale.

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Exercice 16. Orthodiagonalisation.

Diagonalisez chacune des matrices suivantes dans une base orthonormée de vecteurs propres. Donnez pour chacune d'entre elles les matrices de passage.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$