

Division de DL et limites

Théorème 1 (division suivant les puissances croissantes). Soient $A, B \in \mathbb{R}[h]$ deux polynômes et $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $B(0) \neq 0$. Il existe un unique couple (Q_n, R_n) de polynômes vérifiant

$$A = BQ_n + h^{n+1}R_n \quad \text{et} \quad \deg Q_n \leq n.$$

Proposition 1 (quotient de DL). Soient f et g deux fonctions réelles admettant des développements limités à l'ordre n en 0 que l'on note

$$f(h) = A(h) + o(h^n), \quad g(h) = B(h) + o(h^n).$$

On suppose que $B(0) \neq 0$. La fonction $\frac{f}{g}$ admet un développement limité à l'ordre n en 0 dont la partie polynomiale est le quotient de la division de A par B suivant les puissances croissantes à l'ordre n .

Exemple 1 (division suivant les puissances croissantes). Calculons le développement limité de la fonction

$$f_1 : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{x^2}{x+1}$$

à l'ordre 2 au voisinage de 1. Pour cela, on commence par définir une nouvelle fonction pour nous ramener à l'étude d'un DL au voisinage de 0. On pose donc $f_0 : h \mapsto f_1(1+h)$ et on a

$$f_0(h) = f_1(1+h) = \frac{(1+h)^2}{1+h+1} = \frac{1+2h+h^2}{2+h}.$$

Ainsi, le DL de f_1 au voisinage de 1 est égal au DL de f_0 au voisinage de 0. On pose maintenant

$$A(h) = 1 + 2h + h^2 \quad \text{et} \quad B(h) = 2 + h.$$

La division suivant les puissances croissantes de A et B est possible puisque $B(0) = 2 \neq 0$.

$$\begin{array}{r|l} 1 + 2h + h^2 & 2 + h \\ 1 + \frac{1}{2}h & \frac{1}{2} + \frac{3}{4}h + \frac{1}{8}h^2 \\ \hline \frac{3}{2}h + h^2 & \\ \frac{3}{2}h + \frac{3}{4}h^2 & \\ \hline \frac{1}{4}h^2 & \\ \frac{1}{4}h^2 + o(h^2) & \\ \hline o(h^2) & \end{array}$$

On en déduit que le développement limité de f_1 au voisinage de 1 (ou de f_0 au voisinage de 0) à l'ordre 2 est donné par

$$f_1(1+h) = \frac{1}{2} + \frac{3}{4}h + \frac{1}{8}h^2 + o(h^2).$$

