

Constructions de nouveaux groupes

1 Groupes quotient

Exercice 1. Compatibilité avec une loi.

Pour chacun des cas suivants, dites si la relation $\simeq$ est compatible avec la loi $\star$. Si ce n'est pas le cas, donnez un contre-exemple.

- 1) Sur $\mathbb{Z}$, $x \simeq x' \Leftrightarrow x \equiv x' \pmod{2}$, $x \star y = x + y$.
- 2) Sur $\mathbb{Z}$, $x \simeq x' \Leftrightarrow x \equiv x' \pmod{2}$, $x \star y = x \times y$.
- 3) Sur $\mathbb{R}$, $x \simeq x' \Leftrightarrow |x| = |x'|$, $x \star y = x + y$.
- 4) Sur $\mathbb{R}$, $x \simeq x' \Leftrightarrow |x| = |x'|$, $x \star y = x \times y$.

Exercice 2. Réécriture.

Soit H un sous-groupe de G . On rappelle que la relation de congruence modulo H sur G est définie par $x \simeq y \Leftrightarrow x^{-1}y \in H$. Réécrivez cette définition en notant G additivement.

Exercice 3. Congruence modulo un sous-groupe.

Pour chacun des couples $(x, y) \in G^2$ suivants, dites si x est congru y modulo H .

- 1) Posons $G = (\mathbb{Z}, +)$ et $H = 7\mathbb{Z}$.

1.1) $(0, 0)$	1.2) $(3, 73)$	1.3) $(7, 37)$	1.4) $(-4, 4)$
---------------	----------------	----------------	----------------
- 2) Posons $G = (\mathbb{R}^*, \times)$ et $H = \mathbb{Q}^*$.

2.1) $(3, 7)$	2.2) $(\pi, 2\pi)$	2.3) (π, π^2)	2.4) $(2^{-\frac{1}{4}}, 2^{\frac{1}{4}})$
---------------	--------------------	---------------------	--

Exercice 4. Quotients.

On considère le groupe $G = \llbracket 0, 11 \rrbracket$ muni de l'addition modulo 12. Pour chacun des sous-groupes H suivants, calculez l'ensemble quotient G/H en explicitant les différentes classes à gauche modulo H .

- 1) $H = \{0, 6\}$
- 2) $H = \{0, 3, 6, 9\}$
- 3) $H = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$
- 4) $H = G$

On considère maintenant le groupe $G = \llbracket 1, 12 \rrbracket$ muni de la multiplication modulo 13. Faites de même pour les sous-groupes suivants.

- 5) $H = \{1, 12\}$
- 6) $H = \{1, 3, 9\}$

Exercice 5. Congruence modulo un sous-groupe.

Soit H un sous-groupe de $(G, \star)$. On considère la relation $\simeq$ de congruence modulo H .

- 1) Montrez que $\simeq$ est une relation d'équivalence.
- 2) Montrez que la classe d'équivalence de $x \in G$ est $x \star H$.
- 3) On suppose que G est abélien. Montrez que la relation $\simeq$ est compatible avec la loi $\star$.

Exercice 6. Tables de Cayley de groupes quotient.

Pour les questions 2, 3 et 6 de l'exercice 4, écrivez la table de Cayley du groupe quotient G/H .

2 Produit direct de groupes

Exercice 7. Réécriture.

Soient $(G_1, \star_1), \dots, (G_n, \star_n)$ des groupes. On rappelle que le produit cartésien $G_1 \times \dots \times G_n$ est un groupe pour la loi $\star$ définie par

$$(x_1, \dots, x_n) \star (y_1, \dots, y_n) = (x_1 \star_1 y_1, \dots, x_n \star_n y_n).$$

- 1) Réécrivez cette définition en notant les groupes multiplicativement. Autrement dit, interdiction d'utiliser $\star, \star_1, \dots, \star_n$.
- 2) Réécrivez maintenant cette définition en notation additive. Explicitez également l'élément neutre et l'opposé d'un élément $x = (x_1, \dots, x_n)$.

Exercice 8. Fun with Quotient Groups and Direct Products.

Pour chacun des cas suivants, explicitez le quotient G/H puis dites si les équations sont vraies ou fausses dans le quotient.

- 1) $G = (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^2$ et $H = \{(0, 0), (1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$.
 - 1.1) $\overline{(1, 1)} + \overline{(2, 2)} = \overline{(3, 3)}$.
 - 1.2) $\overline{(0, 2)} + \overline{(1, 3)} = \overline{(0, 0)}$.
 - 1.3) $\overline{(3, 0)} - \overline{(3, 3)} = -\overline{(1, 2)}$.
- 2) $G = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$ et $H = \{(0, 0), (1, 2)\}$.
 - 2.1) $\overline{(1, 1)} + \overline{(0, 1)} = \overline{(1, 0)}$.
 - 2.2) $\overline{(0, 1)} - \overline{(1, 2)} = \overline{(0, 1)}$.
 - 2.3) $\overline{(0, 1)} + \overline{(1, 0)} + \overline{(1, 1)} = \overline{(1, 0)}$.
- 3) $G = (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) \times \mathbb{U}_4$ et $H = \{(0, 1), (1, 1), (2, 1)\}$ avec $\mathbb{U}_4 = (\{\pm 1, \pm i\}, \times)$.
 - 3.1) $\overline{(1, i)} \star \overline{(2, i)} = \overline{(0, 1)}$.
 - 3.2) $\overline{(1, i)} = \overline{(2, i)}^{-1}$.
 - 3.3) $\overline{(2, -1)} \star \overline{(2, i)}^{-1} = \overline{(1, i)}$.