

Diagonalisation, la théorie

1 Factorisation de polynôme réel

Exercice 1. Polynômes sans racine entière.

Montrez que les polynômes suivants n'admettent pas de racines entières.

- 1) $P_1 = 7X^2 + 3X + 1$.
- 2) $P_2 = 42X^5 + 7X^2 + 3X + 1$.
- 3) $P_3 = X^4 + 2X^2 + 1$.

Théorème (racine rationnelle). Soit $P = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n$ un polynôme à coefficients dans $\mathbb{Z}$. On suppose que a_0 et a_n sont non nuls. Si une fraction irréductible $\frac{p}{q}$ est racine de P , alors p divise a_0 et q divise a_n .

Exercice 2. Preuve du théorème.

On reprend les notations du théorème. Soit $P = \sum_{i=0}^n a_iX^i$ un polynôme à coefficients entiers de degré n . L'objectif de cet exercice est de montrer que si la fraction rationnelle irréductible $\frac{p}{q}$ est une racine de P , alors p divise le terme constant a_0 et q divise le coefficient dominant a_n .

On rappelle les résultats d'arithmétique suivants. Soient p et q deux entiers premiers entre eux :

- en utilisant le théorème de Bézout, on montre que p et q^n sont premiers entre eux pour tout entier positif n ;
- le lemme de Gauss démontre que si p divise le produit qa , avec a un entier non nul, alors p divise a .

- 1) Développez l'expression $q^n P(\frac{p}{q})$.
- 2) Dans l'équation précédente, isolez a_0q^n puis factorisez par p .
- 3) Concluez correctement en montrant que p divise a_0 .
- 4) Avec un raisonnement similaire, montrez que q divise a_n .

Exercice 3. Factorisation de polynômes.

Factorisez les polynômes de $\mathbb{Q}[X]$ suivants :

- 1) $P_1(X) = X^4 + 2X^3 - 2X - 1$;
- 2) $P_2(X) = X^4 - 3X^3 - 6X^2 + 8X$;
- 3) $P_3(X) = X^3 - 7X^2 + X - 7$;
- 4) $P_4(X) = 8X^3 - 12X^2 + 6X - 1$.

2 Somme d'espaces

2.1 Intersection

Exercice 4. Quid de l'union ?

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E . L'union $F \cup G$ est-elle un sous-espace vectoriel de E ?

2.2 Somme

Exercice 5. Somme d'espaces.

Que pensez-vous des équations suivantes ?

- | | | |
|--|--|--|
| 1) $\mathbb{Z} + \mathbb{Z} = 2\mathbb{Z}$. | 4) $\mathbb{Z} + \{1\} = \mathbb{Z}$. | 7) $\mathbb{Q} + \mathbb{Z} = \mathbb{Q}$. |
| 2) $2\mathbb{Z} + 2\mathbb{Z} = 4\mathbb{Z}$. | 5) $\{1\} + \{1\} = \{2\}$. | 8) $\mathbb{Q} + (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = \mathbb{R}$. |
| 3) $2\mathbb{Z} + 3\mathbb{Z} = 5\mathbb{Z}$. | 6) $\{0, 1\} + \{0, 1\} = \{0, 2\}$. | 9) $\mathbb{R}_2[X] + \mathbb{R}_3[X] = \mathbb{R}_5[X]$. |

Exercice 6. Preuve de la somme d'espaces.

Montrez que la somme de deux sous-espaces vectoriels reste un espace vectoriel. Pour cela, montrez que la somme est stable par combinaisons linéaires.

Exercice 7. Espaces en somme directe.

Pour chacun des couples F et G de sous-espaces de E suivants, déterminer si leur somme est directe ou non.

- 1) $E = \mathbb{R}^3$ avec $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = z = 0\}$ et $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y\}$.
- 2) $E = \mathbb{R}^3$ avec $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = z = 0\}$ et $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + z = y\}$.
- 3) $E = \mathbb{R}^3$ avec $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y\}$ et $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + z = y\}$.
- 4) $E = \mathbb{R}_2[X]$ avec $F = \{aX^2 + aX + a \in \mathbb{R}_2[X] \mid a \in \mathbb{R}\}$ et $G = \{aX + b \in \mathbb{R}_2[X] \mid a, b \in \mathbb{R}\}$.
- 5) $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ avec $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a-b \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{R} \right\}$ et $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a+b \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{R} \right\}$.

2.3 Sous-espaces supplémentaires

Exercice 8. Espaces supplémentaires.

On considère les sous ensembles de $\mathbb{R}^3$ suivants :

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + z = 0\}, \quad G = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = 0\},$$

Montrez que F est un supplémentaire de G de deux façons différentes :

- la première en appliquant la méthode du pivot ;
- la seconde avec la définition de sous-espaces supplémentaires.

Indication pour la deuxième méthode : vous pouvez résoudre l'équation vectorielle d'inconnues a et b suivante :

$$(x, y, z) = (a, a + z, z) + (b, -b, 0).$$

Exercice 9. Paire, impaire, supplémentaire.

Dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ muni des lois usuelles, on considère les ensembles P et I des applications paires et impaires respectivement. L'objectif de cet exercice est de montrer que ces sous-espaces sont supplémentaires.

1) Montrez que P et I sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Soit f une application de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

2) Soit $p, i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ les applications définies par

$$p(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \quad \text{et} \quad i(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

Montrez que p est paire et que i est impaire.

3) Montrez que $f \in P + I$. Que peut-on en déduire ?

4) Montrez que P et I sont supplémentaires.

3 Preuve de la diagonalisation

Proposition. Soit f un endomorphisme de E et λ un scalaire de $\mathbb{K}$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. λ est valeur propre de f ;
2. l'endomorphisme $f - \lambda \text{Id}_E$ n'est pas injectif ;
3. $\det(f - \lambda \text{Id}_E) = 0$;
4. pour toute base $\mathcal{B}$ de E , $\det([f]_{\mathcal{B}} - \lambda \text{Id}_E) = 0$.

Exercice 10. Preuve de la proposition.

On admet que le déterminant d'un endomorphisme se comporte comme le déterminant d'une matrice. Entre autres, pour tous endomorphismes f et g de E , on a

$$\det(fg) = \det(f) \det(g) \quad \text{et} \quad \det(f^{-1}) = \det(f)^{-1}.$$

De plus, f est inversible si et seulement si $\det(f) \neq 0$. Ces résultats seront approfondis à la fin de cet exercice.

- 1) En utilisant la définition de la valeur propre montrez qu'il existe u dans E tel que $(f - \lambda \text{Id}_E)(u) = 0$.
- 2) Déduisez-en l'équivalence entre 1 et 2 en utilisant la définition du noyau d'une application.
- 3) Déduisez-en l'équivalence entre 2 et 3.
- 4) En utilisant les matrices de passage, montrez que le déterminant de la matrice d'un endomorphisme ne dépend pas de la base choisie pour sa représentation. Déduisez-en l'équivalence entre 3 et 4.

Exercice 11. Démonstration d'un cas particulier.

Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E de dimension finie. Soient λ_1 et λ_2 deux valeurs propres distinctes de f . Montrez que les sous-espaces propres E_{λ_1} et E_{λ_2} sont en somme directe.