

Applications linéaires 1

1 Définitions

Exercice 1. Linéaire.

Montrez que les applications suivantes sont linéaires.

1) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, (x, y) \mapsto (-x, 0, 3x).$

Correction. Montrons que f est une application linéaire. Soient $u = (x, y)$ et $u' = (x', y')$ deux éléments de $\mathbb{R}^2$ et λ un scalaire réel. On a

$$\begin{aligned} f(\lambda u + u') &= f(\lambda x + x', \lambda y + y') = (-(\lambda x + x'), 0, 3(\lambda x + x')) \\ &= (-\lambda x, 0, 3\lambda x) + (-x', 0, 3x') = \lambda(-x, 0, 3x) + (-x', 0, 3x') = \lambda f(u) + f(u'). \end{aligned}$$

Ainsi, f est une application linéaire.

2) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x + y.$

Correction. Montrons que f est une application linéaire. Soient $u = (x, y)$ et $u' = (x', y')$ deux éléments de $\mathbb{R}^2$ et λ un scalaire réel. On a

$$\begin{aligned} f(\lambda u + u') &= f(\lambda x + x', \lambda y + y') = (\lambda x + x') + (\lambda y + y') \\ &= \lambda x + x' + \lambda y + y' = \lambda(x + y) + (x' + y') = \lambda f(u) + f(u'). \end{aligned}$$

Ainsi, f est une application linéaire.

3) $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, (x_1, x_2, x_3) \mapsto (2x_1, x_2 + x_1, x_3 + x_1).$

Correction. On montre que f est linéaire de la même manière.

4) $f : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2, (z_1, z_2) \mapsto (iz_2, z_1 - iz_2).$

Correction. Montrons que f est une application linéaire. Soient $u = (z_1, z_2)$ et $u' = (z'_1, z'_2)$ deux éléments de $\mathbb{C}^2$ et λ un scalaire complexe. On a

$$\begin{aligned} f(\lambda u + u') &= f(\lambda z_1 + z'_1, \lambda z_2 + z'_2) = (i(\lambda z_2 + z'_2), (\lambda z_1 + z'_1) - i(\lambda z_2 + z'_2)) \\ &= \lambda(iz_2, z_1 - iz_2) + (iz'_2, z'_1 - iz'_2) = \lambda f(u) + f(u'). \end{aligned}$$

Ainsi, f est une application linéaire.

Exercice 2. Pas linéaire.

Montrez que les applications suivantes ne sont pas linéaires.

1) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (2x - y, y + 1).$

Correction. L'application f n'est pas linéaire car $f(0, 0) = (0, 1) \neq (0, 0).$

2) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x^2 - y^2.$

Correction. L'application f n'est pas linéaire. En effet,

$$f(2 \cdot (1, 0)) = f(2, 0) = 2^2 - 0^2 = 4, \quad 2 \cdot f(1, 0) = 2(1^2 - 0^2) = 2.$$

Nous venons donc de trouver un vecteur v et un scalaire λ tels que $f(\lambda v) \neq \lambda f(v)$.

3) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \sin(x + y)$.

Correction. L'application f n'est pas linéaire. En effet,

$$\begin{aligned} f\left(\left(0, \frac{\pi}{2}\right) + \left(\frac{\pi}{2}, 0\right)\right) &= f\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \sin(\pi) = 0, \\ f\left(0, \frac{\pi}{2}\right) + f\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) &= \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 + 1 = 2. \end{aligned}$$

Nous venons donc de trouver deux vecteurs u et v tels que $f(u + v) \neq f(u) + f(v)$.

4) $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto \bar{z}$.

Correction. Attention, l'application f est linéaire si le corps des scalaires vaut $\mathbb{R}$. En revanche, elle ne l'est pas quand $\mathbb{C}$ est vu comme un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel. En effet, pour $z = 1$ et $\lambda = i$, on trouve

$$f(i \times 1) = f(i) = \bar{i} = -i, \quad i \times f(1) = i \times \bar{1} = i \times 1 = i.$$

Exercice 3. Combinaisons d'applications linéaires.

Considérons les applications f et g de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définies par

$$f : (x, y) \mapsto (x, 0) \quad \text{et} \quad g : (x, y) \mapsto (0, y).$$

1) Montrez que les applications f et g sont linéaires.

Correction. Soient $u = (x, y)$, $u' = (x', y')$ deux vecteurs dans $\mathbb{R}^2$ et λ un scalaire réel. On a

$$\begin{aligned} f(\lambda u + u') &= f(\lambda x + x', \lambda y + y') = (\lambda x + x', 0) = \lambda(x, 0) + (x', 0) = \lambda f(u) + f(u'), \\ g(\lambda u + u') &= g(\lambda x + x', \lambda y + y') = (0, \lambda y + y') = \lambda(0, y) + (0, y') = \lambda g(u) + g(u'). \end{aligned}$$

Nous venons de montrer que f et g sont des applications linéaires.

2) Calculez $f \circ f$, $g \circ g$, $f \circ g$, $g \circ f$ et $f + g$.

Correction. Notons Z l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ qui envoie tout vecteur sur le vecteur nul. Soit $u = (x, y)$ un vecteur dans $\mathbb{R}^2$. On a

$$\begin{aligned} f \circ f(u) &= f(x, 0) = (x, 0) = f(u), & f \circ g(u) &= f(0, y) = (0, 0) = Z(u), \\ g \circ g(u) &= g(0, y) = (0, y) = g(u), & g \circ f(u) &= g(x, 0) = (0, 0) = Z(u), \end{aligned}$$

$$(f + g)(u) = f(x, y) + g(x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, y) = \text{Id}_{\mathbb{R}^2}(u).$$

Ainsi, $f \circ f = f$, $g \circ g = g$, $f \circ g = g \circ f = Z$ et $f + g = \text{Id}_{\mathbb{R}^2}$.

2 Représentation matricielle d'application linéaire

2.1 Introduction

Exercice 4. Application linéaire graphique.

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ défini sur la figure 1 à partir de son image de la base (e_1, e_2) . Tracez les vecteurs $f(u)$ et $f(v)$.

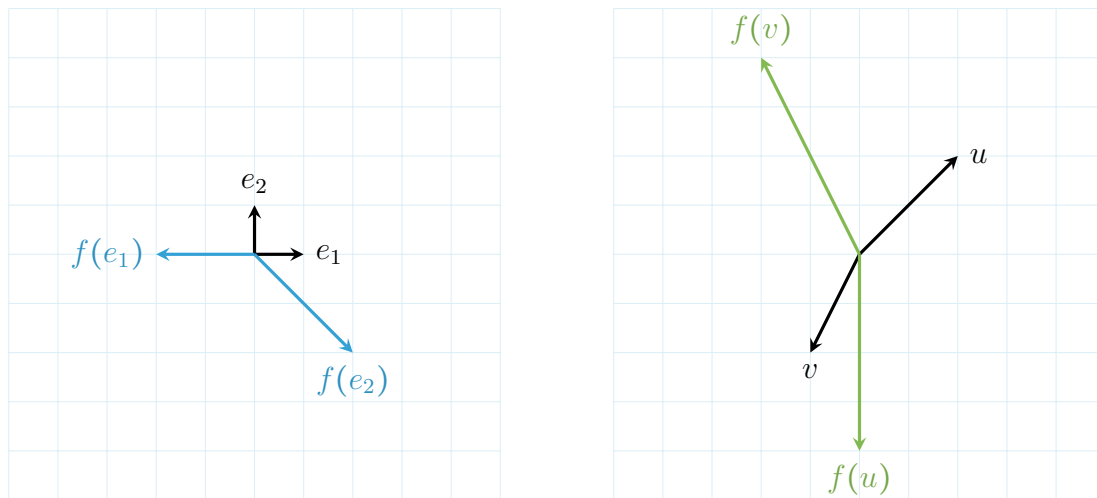


FIGURE 1 – Définitions de l'exercice 4.

Correction. On remarque que

$$u = (2, 2) = 2e_1 + 2e_2, \quad v = (-1, -2) = -e_1 - 2e_2.$$

Puisque l'application f est linéaire, on obtient

$$f(u) = f(2e_1 + 2e_2) = 2f(e_1) + 2f(e_2), \quad f(v) = f(-e_1 - 2e_2) = -f(e_1) - 2f(e_2).$$

Exercice 5. De la forme algébrique à la matrice.

On considère les applications linéaires suivantes :

$$\begin{array}{lll} f_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4 & f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 & f_3 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y) \mapsto (x, y, x + y, x - y) & x \mapsto (-x, 2x) & (x, y, z) \mapsto (0, x + y + z, x - y - z) \end{array}$$

On considère également les vecteurs suivants :

$$u = 2, \quad v = (-1, 1), \quad w = (1, 0, -1).$$

Pour chacune des applications linéaires définies ci-dessus :

- 1) Calculez l'image du « bon » vecteur u , v ou w de façon algébrique.

Correction. $f_1(v) = f_1(-1, 1) = (-1, 1, 0, -2),$
 $f_2(u) = f_2(2) = (-2, 4),$
 $f_3(w) = f_3(1, 0, -1) = (0, 0, 2).$

- 2) Déterminez la matrice associée à l'application.

Correction. Les matrices A_1 , A_2 et A_3 associées aux fonctions f_1 , f_2 et f_3 sont données par

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

- 3) Calculez l'image du « bon » vecteur u , v ou w à l'aide de la matrice et vérifiez que vous obtenez bien le même résultat que dans la question 1.

Correction. On retrouve bien

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} (2) = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 6. De la matrice à la forme algébrique.

On considère les matrices réelles suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C = (1 \quad -1 \quad 0), \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 0 \\ 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On considère également les vecteurs suivants :

$$u_1 = 2, \quad u_2 = (-1, 1), \quad u_3 = (1, 0, -1), \quad u_4 = (-2, 1, -1, 2).$$

Pour chacune des applications linéaires définies ci-dessus :

- 1) Calculez l'image du « bon » vecteur u_1 , u_2 , u_3 ou u_4 à l'aide de la matrice.

Correction.

$$\begin{aligned} Au_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, & Bu_1 &= \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} (2) = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ Cu_3 &= (1 \quad -1 \quad 0) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = (1), & Du_2 &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 0 \\ 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- 2) Déterminez l'écriture algébrique de l'application à partir de son écriture matricielle.

Correction. Pour tous x , y et z dans $\mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} f_1(x, y, z) &= (x + 2y - z, 3y - z), & f_2(x) &= (x, -x, 0), \\ f_3(x, y, z) &= x - y, & f_4(x, y) &= (-x, 3x, -2y, x + y). \end{aligned}$$

- 3) Calculez l'image du « bon » vecteur u_1 , u_2 , u_3 ou u_4 de façon algébrique et vérifiez que vous obtenez bien le même résultat que dans la question 1.

Correction. On retrouve bien

$$\begin{aligned} f_1(1, 0, -1) &= (2, 1), & f_2(2) &= (2, -2, 0), \\ f_3(1, 0, -1) &= 1, & f_4(-1, 1) &= (1, -3, -2, 0). \end{aligned}$$

2.2 Composée d'applications et produit matriciel

Exercice 7. Produit 2×2 .

Nous allons montrer que la définition de produit matriciel représente bien une composition pour les applications de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$. Soient f et g deux applications de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$. Il existe donc des matrices

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix},$$

telles que pour tous u, v dans $\mathbb{R}^2$, on ait $f(v) = Av$ et $g(u) = Bu$.

1) Soit $u = (x, y)$ dans $\mathbb{R}^2$. Explicitez le vecteur $v = g(u) = Bu$.

Correction.

$$v = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11}x + b_{12}y \\ b_{21}x + b_{22}y \end{pmatrix}.$$

2) Explicitez ensuite le vecteur $w = f(v) = Av$.

Correction. Notons $v = (x', y')$. On a

$$\begin{aligned} w &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x' + a_{12}y' \\ a_{21}x' + a_{22}y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(b_{11}x + b_{12}y) + a_{12}(b_{21}x + b_{22}y) \\ a_{21}(b_{11}x + b_{12}y) + a_{22}(b_{21}x + b_{22}y) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11}x + a_{11}b_{12}y + a_{12}b_{21}x + a_{12}b_{22}y \\ a_{21}b_{11}x + a_{21}b_{12}y + a_{22}b_{21}x + a_{22}b_{22}y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21})x + (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22})y \\ (a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21})x + (a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22})y \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

3) Calculez le produit matriciel $C = A \times B$ puis explicitez le vecteur Cu .

Correction.

$$\begin{aligned} (A \times B)u &= \left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \overbrace{\begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}}^C \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21})x + (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22})y \\ (a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21})x + (a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22})y \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Puisque $w = Av = A(Bu)$, nous venons de montrer que $A(Bu) = (A \times B)u$.

Exercice 8. Dimensions et produits.

On considère des matrices A, B, C et D vérifiant $A \in \mathcal{M}_{4,2}(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{2,4}(\mathbb{R})$, $C \in \mathcal{M}_{2,7}(\mathbb{R})$ et $D \in \mathcal{M}_{4,7}(\mathbb{R})$. Parmi les opérations suivantes, précisez celles qui sont permises. Dans ce cas, indiquez le nombre de lignes et le nombre de colonnes des matrices résultats.

- | | | |
|---------|---------------|--------------|
| 1) BA | 4) BC | 7) ABD |
| 2) AB | 5) AC | 8) $AC + BD$ |
| 3) CA | 6) $A(B + C)$ | 9) $ABABD$ |

Correction. Un produit matriciel AB n'est possible que si le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B . Autrement dit, si $A \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K})$ et si $B \in \mathcal{M}_{pq}(\mathbb{K})$, le produit AB n'est possible que si $n = p$. Le résultat sera une matrice m lignes, q colonnes.

- 1) BA produit une matrice 2×2 .
- 2) AB produit une matrice 4×4 .
- 3) CA est impossible.
- 4) BC est impossible.

- 5) AC produit une matrice 4×7 .
- 6) $A(B + C)$ est impossible car la somme est impossible.
- 7) ABD produit une matrice 4×7 .
- 8) $AC + BD$ est impossible car AC produit une matrice 4×7 et BD produit une matrice 2×7 .
- 9) $ABABD$ produit une matrice 4×7 .

Exercice 9. Premier exemple sur la composée.

On considère les matrices A et B définies par

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

On note f l'application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à A et on note g l'application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à B . On pose également $u = f + g$ et $v = f \circ g$.

- 1) Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, déterminez les valeurs de $f(x, y)$ et de $g(x, y)$.

Correction.

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x + 5y \\ 2x - 3y \end{pmatrix}, \quad B \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y \\ 3x + 4y \end{pmatrix}.$$

Ainsi, $f(x, y) = (-x + 5y, 2x - 3y)$ et $g(x, y) = (x + 2y, 3x + 4y)$.

- 2) En déduire la valeur de $u(x, y)$ et de $v(x, y)$ pour tout (x, y) de $\mathbb{R}^2$.

Correction. On a

$$\begin{aligned} u(x, y) &= f(x, y) + g(x, y) = (-x + 5y, 2x - 3y) + (x + 2y, 3x + 4y) = (7y, 5x + y), \\ v(x, y) &= f(g(x, y)) = f(x + 2y, 3x + 4y) \\ &= (- (x + 2y) + 5(3x + 4y), 2(x + 2y) - 3(3x + 4y)) \\ &= (14x + 18y, -7x - 8y). \end{aligned}$$

- 3) Calculez $A + B$ et AB .

Correction.

$$A + B = \begin{pmatrix} 0 & 7 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}, \quad AB = \begin{pmatrix} 14 & 18 \\ -7 & -8 \end{pmatrix}.$$

- 4) Comparez les résultats de la question 2 avec ceux de la question précédente.

Correction. On calcule

$$(A + B) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 7 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7y \\ 5x + y \end{pmatrix}, \quad (AB) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 18 \\ -7 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14x + 18y \\ -7x - 8y \end{pmatrix}.$$

On retrouve bien les résultats de la question 2.

Exercice 10. Associativité.

Vérifiez que $A(BC) = (AB)C$ avec les matrices suivantes.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Correction.

$$\overbrace{\begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}}^{AB} \overbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}^C = \begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad \overbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}^A \overbrace{\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -4 & -4 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}}^{BC} = \begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 11. Associativité du produit.

On considère les trois matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Déterminez tous les produits $M_1 M_2 M_3$ avec $M_i \in \{A, B, C\}$ qu'il est possible de réaliser à l'aide des trois matrices ci-dessus. Avant de calculer le résultat du produit, déterminez les dimensions de la matrice résultante.

Correction. Pour faire un produit matriciel, il faut que le nombre de colonne de la matrice de gauche soit égal au nombre de lignes de la matrice de droite. Ainsi, les produits qu'il est possible de réaliser sont les suivants :

■ ABC produit une matrice 2×2 :

$$ABC = \overbrace{\begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}}^{AB} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix};$$

■ BCA produit une matrice 3×3 :

$$BCA = \overbrace{\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -4 & -4 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}}^{BC} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & 0 & 6 \\ -4 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 4 \end{pmatrix};$$

■ CAB produit une matrice 4×4 :

$$CAB = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \overbrace{\begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}}^{AB} = \begin{pmatrix} -5 & 5 & -6 & 5 \\ 2 & -2 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 4 & -2 \\ 3 & -3 & 4 & -3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 12. Le produit matriciel n'est pas commutatif en général.

Déterminez tous les réels x et y vérifiant l'égalité

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Correction. Soient $x, y \in \mathbb{R}$. On calcule tout d'abord les deux termes de l'égalité.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2x - y \\ 1 & x \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + x & -1 \\ y & 0 \end{pmatrix}.$$

Deux matrices sont égales si (elles ont les mêmes dimensions et si) elles ont les mêmes coefficients. Ainsi

$$\begin{pmatrix} 2 & 2x - y \\ 1 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + x & -1 \\ y & 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 2 = 2 + x \\ 2x - y = -1 \\ 1 = y \\ x = 0 \end{cases}.$$

L'unique solution de ce système est $(x, y) = (0, 1)$, donc l'égalité est vérifiée uniquement pour ce couple de réels.

Exercice 13. Produit de deux matrices.

Effectuez à la main chacun des produits suivants. Un peu de réflexion vous épargnera beaucoup de temps et d'erreurs de calcul.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 9 & -1 & 1 & 6 & 1 \\ 0 & 6 & -2 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 & 0 \\ -3 & 0 & -1 & -3 \\ -4 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2 & 3 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \\ -4 & 7 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Correction. Dans chacun des produits suivants, au moins l'une des matrices est creuse, ce qui signifie qu'elle contient beaucoup de zéros. Pour chacune des corrections suivantes, les lignes d'une matrice $p \times q$ pourront être désignées par $L_1, \dots, L_p$ et les colonnes par $C_1, \dots, C_q$. Pour le premier calcul, on considère que la première matrice agit sur les lignes de la seconde.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_1 - L_2 \\ L_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Pour le second calcul, on considère que la première matrice agit sur les lignes de la

seconde.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 9 & -1 & 1 & 6 & 1 \\ 0 & 6 & -2 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_2 \\ L_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 6 & -2 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 9 & -1 & 1 & 6 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pour le troisième calcul, on considère que la première matrice agit sur les lignes de la seconde.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 & 0 \\ -3 & 0 & -1 & -3 \\ -4 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ 0 \\ L_1 + L_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 & 0 \\ -3 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pour le quatrième calcul, on considère que la seconde matrice agit sur les colonnes de la première.

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = (C_1 \ C_2 \ C_3 \ C_4 \ C_5) \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \\ = (-C_1 \ C_2 \ C_4 \ C_3 \ 3C_5) \\ = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 2 & -3 \\ -2 & 1 & 4 & -1 & 6 \end{pmatrix}.$$

Pour le dernier calcul, on considère que la première matrice agit sur les lignes de la seconde puis que la troisième agit sur les colonnes du résultat.

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \\ -4 & 7 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} -L_1 - L_2 \\ L_2 \\ L_1 \\ -L_3 + L_4 \\ -2L_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ -2 & 0 \\ 7 & -9 \\ -6 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} C_2 & C_2 & C_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ -9 & -9 & 7 \\ 4 & 4 & -6 \end{pmatrix}.$$

Exercice 14. Démonstration associativité.

Démontrez que le produit matriciel est associatif pour les matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Correction. Considérons les trois matrices suivantes de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} i & j \\ k & l \end{pmatrix}.$$

Calculons les produits $(AB)C$ et $A(BC)$ et montrons qu'ils sont égaux.

$$\begin{aligned} (AB)C &= \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} i & j \\ k & l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & j \\ k & l \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} aei + bgi + afk + bhk & aej + bgj + afl + bhl \\ cei + dgi + cfk + dhk &cej + dgj + cfl + dhl \end{pmatrix}, \\ A(BC) &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & j \\ k & l \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ei + fk & ej + fl \\ gi + hk & gj + hl \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} aei + afk + bgi + bhk & aej + afl + bgj + bhl \\ cei + cfk + dgi + dhk &cej + cfl + dgj + dhl \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Exercice 15. Identités (pas si) remarquables.

Soient A et B deux matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$. Développez les expressions suivantes.

$$(A + B)^2, \quad (A - B)^2, \quad (A + B)(A - B), \quad (A + \text{Id}_n)(A - \text{Id}_n).$$

Vérifiez vos résultats en les appliquant sur les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Correction. Attention, en général les produits AB et BA sont différents.

$$\begin{aligned} (A + B)^2 &= (A + B)(A + B) = (A + B)A + (A + B)B = A^2 + BA + AB + B^2, \\ (A - B)^2 &= (A - B)(A - B) = (A - B)A - (A - B)B = A^2 - BA - AB + B^2, \\ (A + B)(A - B) &= (A + B)A - (A + B)B = A^2 + BA - AB + B^2, \\ (A + \text{Id}_n)(A - \text{Id}_n) &= A^2 - A\text{Id}_n + \text{Id}_n A - (\text{Id}_n)^2 = A^2 - A + A - \text{Id}_n = A^2 - \text{Id}_n. \end{aligned}$$

Exercice 16. Produit des matrices particulières.

Vérifiez la véracité des affirmations suivantes soit en les démontrant, soit en donnant un contre-exemple.

1) Une matrice diagonale est une matrice à la fois triangulaire supérieure et inférieure.

Correction. Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a

$$\begin{aligned} A \text{ est diagonale} &\iff \forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket, i \neq j \Rightarrow a_{i,j} = 0 \\ &\iff \forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket, (i > j \Rightarrow a_{i,j} = 0) \text{ et } (i < j \Rightarrow a_{i,j} = 0) \\ &\iff A \text{ est triangulaire supérieure et inférieure.} \end{aligned}$$

2) Le produit de deux matrices triangulaires inférieures est une matrice triangulaire inférieure.

Correction. Soient $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$ deux matrices triangulaires inférieures dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Autrement dit, pour tous indices $i < j$, on a $a_{i,j} = b_{i,j} = 0$. Notons $C = (c_{i,j})$ le produit de A par B . Soient $1 \leq i < j \leq n$ deux entiers. On a

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j} = \left(\sum_{k=1}^i a_{i,k} \underbrace{b_{k,j}}_{=0} \right) + \left(\sum_{k=i+1}^n \underbrace{a_{i,k}}_{=0} b_{k,j} \right) = 0.$$

Ainsi, C est une matrice triangulaire supérieure.

Exercice 17. Produit et transposées.

Considérons les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Vérifiez que $(AB)^\top = B^\top A^\top$.

Correction.

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad B^\top A^\top = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 18. Puissance et récurrence.

Soit A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Démontrez par récurrence que pour tout entier naturel $p \geq 1$, on a $A^p = AA^{p-1}$.

Correction. On voit que $A \times A^0 = A \times \text{Id}_n = A^1$ donc la propriété est vérifiée pour $p = 1$. Soit $p \geq 1$ un entier. Supposons que $A^p = AA^{p-1}$. Montrons que $A^{p+1} = AA^p$. On a

$$A^{p+1} := A^p \times A = \overbrace{(A \times A^{p-1})}^{\text{HR}} \times A = A \times (A^{p-1} \times A) = A \times A^p.$$

Le résultat s'ensuit par récurrence.

Remarque. Le symbole $:=$ signifie « égal par définition à ». Autrement dit, quand vous le voyez, vous n'avez pas besoin de chercher d'où vient l'égalité.

Exercice 19. Matrice nilpotente.

Une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite *nilpotente* s'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $A^k = 0$. Le plus petit k vérifiant $A^k = 0_n$ est appelé *ordre de nilpotence* de A .

Considérons les matrices A et B respectivement de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définies par

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & -2 & 8 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1) Calculez l'ordre de nilpotence des matrices A et B

Correction. On remarque que

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B^3 = B^2 \times B = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & -2 & 8 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, la matrice A est nilpotente d'ordre 2 et la matrice B est nilpotente d'ordre 3.

2) La somme de deux matrices nilpotentes est-elle nilpotente ?

Correction. Considérons les deux matrices dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On vérifie facilement que $A^2 = B^2 = 0_{2 \times 2}$ et donc A et B sont des matrices nilpotentes. Cependant,

$$A + B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

donc pour tout entier naturel n , on a $(A + B)^{2n} = \text{Id}_2$ et $(A + B)^{2n+1} = A + B$. La matrice $A + B$ n'est donc pas nilpotente ce qui montre que la somme de deux matrices nilpotentes n'est pas nécessairement nilpotente.

Exercice 20. Puissance de matrice.

Soient a , b et c trois réels. On considère les matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1) Calculez A^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Correction. Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n ,

$$A^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 & 0 \\ 0 & b^n & 0 \\ 0 & 0 & c^n \end{pmatrix}.$$

La propriété est clairement vraie pour $n = 1$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que la propriété est vraie au rang n . On a

$$A^{n+1} = A^n \times A = \begin{pmatrix} a^n & 0 & 0 \\ 0 & b^n & 0 \\ 0 & 0 & c^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{n+1} & 0 & 0 \\ 0 & b^{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & c^{n+1} \end{pmatrix}.$$

Le résultat en découle.

2) Calculez B^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Correction. On commence par calculer

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B^3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2 \text{Id}_3.$$

On en déduit que pour tout entier naturel n , on a

$$B^n = \begin{cases} 2^k \text{Id}_3 & \text{si } n = 3k, \\ 2^k B & \text{si } n = 3k + 1, \\ 2^k B^2 & \text{si } n = 3k + 2. \end{cases}$$

Exercice 21. Dédution de puissances.

On considère les matrices A , J et K suivantes.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

1) Calculez J^2 et K^2 .

Correction. On a $J^2 = J$ et $K^2 = 0_{4 \times 4}$.

2) En déduire la valeur de J^n et la valeur de K^n pour tout entier naturel n .

Correction. Pour tout entier $n \geq 2$, on a $J^n = J$ et $K^n = 0_{4 \times 4}$.

3) Calculez A^n pour tout entier naturel n .

Correction. On commence par calculer

$$JK = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = KJ.$$

Ainsi, les matrices J et K commutent. On peut donc utiliser la formule du binôme de Newton pour calculer $(J + K)^n$. Soit $n \geq 2$ un entier. On a

$$\begin{aligned} A^n &= (J + K)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} J^{n-k} K^k = \left(\sum_{k=0}^1 \binom{n}{k} J^{n-k} K^k \right) + \left(\sum_{k=2}^n \binom{n}{k} J^{n-k} \overbrace{K^k}^{0_{4 \times 4}} \right) \\ &= \binom{n}{0} J^n K^0 + \binom{n}{1} J^{n-1} K^1 = J + nJK = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ n & -n & n & 1-n \\ n & -n & n & 1-n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$