

Applications linéaires 1

1 Définitions

Exercice 1. Linéaire.

Montrez que les applications suivantes sont linéaires.

- 1) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, (x, y) \mapsto (-x, 0, 3x)$.
- 2) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x + y$.
- 3) $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, (x_1, x_2, x_3) \mapsto (2x_1, x_2 + x_1, x_3 + x_1)$.
- 4) $f : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2, (z_1, z_2) \mapsto (iz_2, z_1 - iz_2)$.

Exercice 2. Pas linéaire.

Montrez que les applications suivantes ne sont pas linéaires.

- 1) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (2x - y, y + 1)$.
- 2) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x^2 - y^2$.
- 3) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \sin(x + y)$.
- 4) $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto \bar{z}$.

Exercice 3. Combinaisons d'applications linéaires.

Considérons les applications f et g de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définies par

$$f : (x, y) \mapsto (x, 0) \quad \text{et} \quad g : (x, y) \mapsto (0, y).$$

- 1) Montrez que les applications f et g sont linéaires.
- 2) Calculez $f \circ f, g \circ g, f \circ g, g \circ f$ et $f + g$.

2 Représentation matricielle d'application linéaire

2.1 Introduction

Exercice 4. Application linéaire graphique.

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ défini sur la figure 1 à partir de son image de la base (e_1, e_2) . Tracez les vecteurs $f(u)$ et $f(v)$.

Exercice 5. De la forme algébrique à la matrice.

On considère les applications linéaires suivantes :

$$\begin{array}{lll} f_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4 & f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 & f_3 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y) \mapsto (x, y, x + y, x - y) & x \mapsto (-x, 2x) & (x, y, z) \mapsto (0, x + y + z, x - y - z) \end{array}$$

On considère également les vecteurs suivants :

$$u = 2, \quad v = (-1, 1), \quad w = (1, 0, -1).$$

Pour chacune des applications linéaires définies ci-dessus :

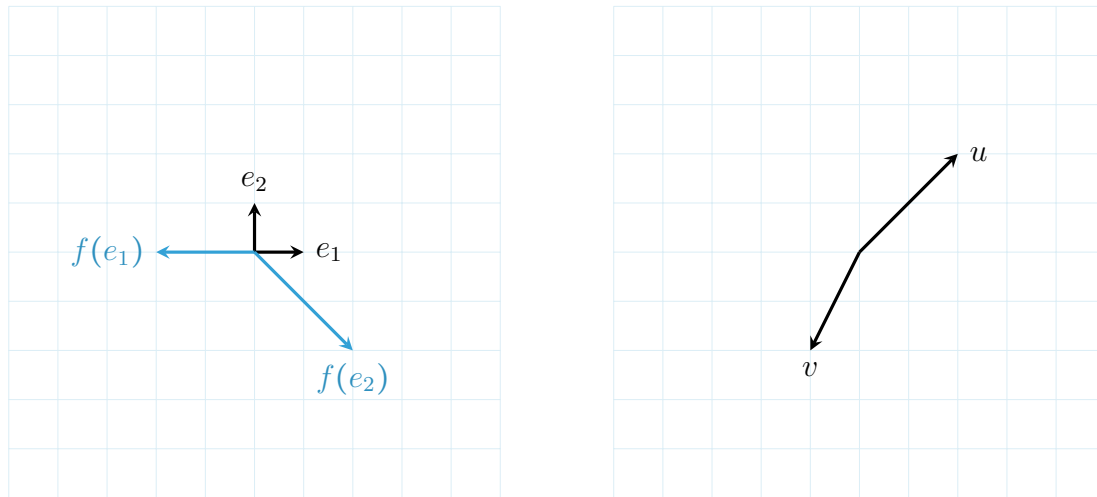


FIGURE 1 – Définitions de l'exercice 4.

- 1) Calculez l'image du « bon » vecteur u , v ou w de façon algébrique.
- 2) Déterminez la matrice associée à l'application.
- 3) Calculez l'image du « bon » vecteur u , v ou w à l'aide de la matrice et vérifiez que vous obtenez bien le même résultat que dans la question 1.

Exercice 6. De la matrice à la forme algébrique.

On considère les matrices réelles suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C = (1 \quad -1 \quad 0), \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 0 \\ 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On considère également les vecteurs suivants :

$$u_1 = 2, \quad u_2 = (-1, 1), \quad u_3 = (1, 0, -1), \quad u_4 = (-2, 1, -1, 2).$$

Pour chacune des applications linéaires définies ci-dessus :

- 1) Calculez l'image du « bon » vecteur u_1 , u_2 , u_3 ou u_4 à l'aide de la matrice.
- 2) Déterminez l'écriture algébrique de l'application à partir de son écriture matricielle.
- 3) Calculez l'image du « bon » vecteur u_1 , u_2 , u_3 ou u_4 de façon algébrique et vérifiez que vous obtenez bien le même résultat que dans la question 1.

2.2 Composée d'applications et produit matriciel

Exercice 7. Produit 2×2 .

Nous allons montrer que la définition de produit matriciel représente bien une composition pour les applications de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$. Soient f et g deux applications de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$. Il existe donc des matrices

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix},$$

telles que pour tous u, v dans $\mathbb{R}^2$, on ait $f(v) = Av$ et $g(u) = Bu$.

- 1) Soit $u = (x, y)$ dans $\mathbb{R}^2$. Explicitez le vecteur $v = g(u) = Bu$.

- 2) Explicitez ensuite le vecteur $w = f(v) = Av$.
 3) Calculez le produit matriciel $C = A \times B$ puis explicitez le vecteur Cu .

Exercice 8. Dimensions et produits.

On considère des matrices A, B, C et D vérifiant $A \in \mathcal{M}_{4,2}(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{2,4}(\mathbb{R})$, $C \in \mathcal{M}_{2,7}(\mathbb{R})$ et $D \in \mathcal{M}_{4,7}(\mathbb{R})$. Parmi les opérations suivantes, précisez celles qui sont permises. Dans ce cas, indiquez le nombre de lignes et le nombre de colonnes des matrices résultats.

- | | | |
|---------|---------------|--------------|
| 1) BA | 4) BC | 7) ABD |
| 2) AB | 5) AC | 8) $AC + BD$ |
| 3) CA | 6) $A(B + C)$ | 9) $ABABD$ |

Exercice 9. Premier exemple sur la composée.

On considère les matrices A et B définies par

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

On note f l'application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à A et on note g l'application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à B . On pose également $u = f + g$ et $v = f \circ g$.

- Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, déterminez les valeurs de $f(x, y)$ et de $g(x, y)$.
- En déduire la valeur de $u(x, y)$ et de $v(x, y)$ pour tout (x, y) de $\mathbb{R}^2$.
- Calculez $A + B$ et AB .
- Comparez les résultats de la question 2 avec ceux de la question précédente.

Exercice 10. Associativité.

Vérifiez que $A(BC) = (AB)C$ avec les matrices suivantes.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 11. Associativité du produit.

On considère les trois matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Déterminez tous les produits $M_1 M_2 M_3$ avec $M_i \in \{A, B, C\}$ qu'il est possible de réaliser à l'aide des trois matrices ci-dessus. Avant de calculer le résultat du produit, déterminez les dimensions de la matrice résultante.

Exercice 12. Le produit matriciel n'est pas commutatif en général.

Déterminez tous les réels x et y vérifiant l'égalité

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 13. Produit de deux matrices.

Effectuez à la main chacun des produits suivants. Un peu de réflexion vous épargnera beaucoup de temps et d'erreurs de calcul.

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 9 & -1 & 1 & 6 & 1 \\ 0 & 6 & -2 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \\ & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 & 0 \\ -3 & 0 & -1 & -3 \\ -4 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2 & 3 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \\ & \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \\ -4 & 7 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Exercice 14. Démonstration associativité.

Démontrez que le produit matriciel est associatif pour les matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 15. Identités (pas si) remarquables.

Soient A et B deux matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$. Développez les expressions suivantes.

$$(A + B)^2, \quad (A - B)^2, \quad (A + B)(A - B), \quad (A + \text{Id}_n)(A - \text{Id}_n).$$

Vérifiez vos résultats en les appliquant sur les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 16. Produit des matrices particulières.

Vérifiez la véracité des affirmations suivantes soit en les démontrant, soit en donnant un contre-exemple.

- 1) Une matrice diagonale est une matrice à la fois triangulaire supérieure et inférieure.
- 2) Le produit de deux matrices triangulaires inférieures est une matrice triangulaire inférieure.

Exercice 17. Produit et transposées.

Considérons les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Vérifiez que $(AB)^\top = B^\top A^\top$.

Exercice 18. Puissance et récurrence.

Soit A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Démontrez par récurrence que pour tout entier naturel $p \geq 1$, on a $A^p = AA^{p-1}$.

Exercice 19. Matrice nilpotente.

Une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite *nilpotente* s'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $A^k = 0$. Le plus petit k vérifiant $A^k = 0_n$ est appelé *ordre de nilpotence* de A .

Considérons les matrices A et B respectivement de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définies par

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & -2 & 8 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- 1) Calculez l'ordre de nilpotence des matrices A et B
- 2) La somme de deux matrices nilpotentes est-elle nilpotente ?

Exercice 20. Puissance de matrice.

Soient a , b et c trois réels. On considère les matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- 1) Calculez A^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
- 2) Calculez B^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 21. Dédution de puissances.

On considère les matrices A , J et K suivantes.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

- 1) Calculez J^2 et K^2 .
- 2) En déduire la valeur de J^n et la valeur de K^n pour tout entier naturel n .
- 3) Calculez A^n pour tout entier naturel n .