

Réduction des endomorphismes

Exercice 1. Valeurs propres.

On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^2$ défini par $f(x, y) = (2x + y, x + 2y)$. Vérifiez que les scalaires 1 et 3 sont des valeurs propres de f en déterminant les vecteurs propres associés.

Exercice 2. Polynôme caractéristique.

- 1) Déterminez le polynôme caractéristique de l'endomorphisme f défini pour tout vecteur $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = (3x, x - y)$. Ce polynôme est-il scindé ?
- 2) Même question pour l'endomorphisme défini par $f(x, y) = (-y, x)$.

Exercice 3. Le polynôme caractéristique est magique.

On définit l'endomorphisme suivant de $\mathbb{R}^3$ pour tout vecteur (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ par

$$f(x, y, z) = (x, 4x - y + 3z, 4x - 2y + 4z).$$

Posons $\mathcal{B} = ((1, 0, 1), (-1, 1, -1), (0, 1, 1))$ et notons $\mathcal{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

- 1) Déterminez la matrice $[f]_{\mathcal{C}}$ de l'application f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
- 2) Calculez le polynôme caractéristique de l'application f à l'aide de la matrice $[f]_{\mathcal{C}}$.
- 3) Déterminez la matrice $[f]_{\mathcal{B}}$ de l'application f dans la base $\mathcal{B}$.
- 4) Calculez le polynôme caractéristique de l'application f à l'aide de la matrice $[f]_{\mathcal{B}}$. Que remarquez-vous ?
- 5) En utilisant les propriétés du déterminant, montrez que le polynôme caractéristique d'un endomorphisme ne dépend pas de la base dans laquelle on exprime sa matrice.

Exercice 4. Calcul de polynômes caractéristiques.

Calculez les polynômes caractéristiques des applications suivantes puis factorisez-les. Chaque application est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, représentée par sa matrice dans la base canonique.

$$M_1 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad M_4 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5. Quelle dimension ?

On considère le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ et l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ défini pour tout vecteur (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ par

$$f(x, y, z) = (3x + 2y + z, -x - z, x + y + 2z).$$

- 1) Déterminez le polynôme caractéristique de f .
- 2) Déduisez-en les valeurs propres ainsi que leur multiplicité algébrique.

3) Déterminez la multiplicité géométrique de chaque valeur propre.

Exercice 6. Diagonalisation en vrac.

Soient f_1, f_2, f_3 et f_4 les endomorphismes de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ définis par leur matrices respectives exprimées dans la base canonique $\mathcal{C}$.

$$[f_1]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad [f_2]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad [f_3]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}, \quad [f_4]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Déterminez si ces endomorphismes sont diagonalisables. Le cas échéant, déterminez une base $\mathcal{B}$ dans laquelle la matrice $[f_i]_{\mathcal{B}}$ est diagonale et déterminez cette matrice diagonale.

Exercice 7. Calcul de puissance.

Et la pratique dans tout ça ? Il est annoncé en introduction de ce chapitre que la diagonalisation permet de calculer plus facilement des puissances de matrices. À vous d'expliquer cela. Un raisonnement par récurrence vous sera utile. Utilisez le fait que si A est diagonalisable, alors elle s'écrit $A = P^{-1}A'P$, avec P la matrice de passage vers une base dans laquelle A est diagonale.

Appliquez ce résultat en considérant la matrice M de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ suivante et en calculant M^n pour tout entier positif n .

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 8. Diagonalisation sans calcul.

Considérons l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{C}$ est

$$[f]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ -2 & 3 & -2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

On considère également les vecteurs $u_1, \dots, u_6$ de $\mathbb{R}^3$ définis par

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad u_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad u_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_6 = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

- 1) Vérifiez que $u_1, \dots, u_6$ sont des vecteurs propres de f . Déduisez-en que f est diagonalisable.
- 2) On pose $\mathcal{B}_1 = (u_1, u_2, u_3)$, $\mathcal{B}_2 = (u_2, u_3, u_4)$, $\mathcal{B}_3 = (u_3, u_4, u_5)$ et $\mathcal{B}_4 = (u_4, u_5, u_6)$. Sans calcul, déterminez la matrice de f dans chacune de ces bases.
- 3) Calculez les matrices de passages entre $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{C}$ puis entre $\mathcal{B}_2$ et $\mathcal{C}$.
- 4) Calculez les matrices $[f]_{\mathcal{B}_1}$ et $[f]_{\mathcal{B}_2}$ à l'aide de la formule de changement de base et de la matrice de f dans la base canonique.

Exercice continu

Exercice continu 1. Valeurs propres.

Cet exercice est décomposé en trois parties pour vous permettre de pratiquer les notions du cours au fur et à mesure. Par conséquent, les résultats de cette première partie doivent être conservés pour la suite. Considérons les trois endomorphismes f_1 , f_2 et f_3 de $\mathbb{R}^3$ représentés par leur matrices respectives M_1 , M_2 et M_3 exprimées dans la base canonique ;

$$M_1 = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Déterminez les valeurs propres de ces trois endomorphismes.

Exercice continu 2. Sous-espaces propres.

Déterminez les sous-espaces propres des endomorphismes f_1 , f_2 et f_3 associés aux valeurs propres que vous avez calculées dans la première partie.

Exercice continu 3. Diagonalisation.

En vous aidant des résultats des deux premières parties, déterminez si les endomorphismes f_1 , f_2 et f_3 sont diagonalisables. Le cas échéant, déterminez une base $\mathcal{B}$ dans laquelle la matrice $[f_i]_{\mathcal{B}}$ est diagonale et donnez cette matrice diagonale ainsi que les matrices de passage.