

Relations d'équivalence

1 Relations binaires

1.1 Définition

Exercice 1. Relations binaires.

- 1) On considère la relation $\mathcal{R}$ définie sur $\mathbb{R}$ par $a\mathcal{R}b \Leftrightarrow (a+b)^2 \leq a^2 + b^2$. Pour tous les couples $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ suivants, dites si $x\mathcal{R}y$ ou si $x\not\mathcal{R}y$:

$$(0, 5), \quad (2, 3), \quad \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \quad (2, -1), \quad (\sqrt{2}, \sqrt{2}).$$

- 2) On considère la relation $\mathcal{S}$ définie sur $\mathbb{R}$ par $x\mathcal{S}y \Leftrightarrow xy = 1$.

2.1) Pour tous les couples $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ suivants, dites si $x\mathcal{S}y$ ou si $x\not\mathcal{S}y$:

$$(1, -1), \quad (2, 3), \quad (-1, -1), \quad (\exp(1), \exp(-1)), \quad \left(\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

2.2) Existe-t-il un $x \in \mathbb{R}$ tel que $x\mathcal{S}0$?

Exercice 2. Graphes de relations.

Pour chacune des relations suivantes sur $\llbracket 0, 5 \rrbracket$, dessinez son graphe associé.

- 1) La relation $\mathcal{R}$ définie par $a\mathcal{R}b \Leftrightarrow (a \text{ et } b \text{ sont pairs})$.
- 2) La relation $\mathcal{R}$ définie par $a\mathcal{R}b \Leftrightarrow a + b \text{ est impair}$.
- 3) La relation d'égalité.
- 4) La relation « inférieur ou égal ».

1.2 Propriétés des relations binaires

Exercice 3. Propriétés des relations.

Pour chacune des relations suivantes, dites si elle est réflexive, symétrique ou transitive. Dans le cas où la relation ne vérifie pas une propriété, donnez un contre-exemple. Autrement, aucune démonstration n'est demandée.

- 1) La relation $\mathcal{R}$ sur $\mathbb{Z}$ définie par $a\mathcal{R}b \Leftrightarrow a^2 = b^2$.
- 2) La relation $\mathcal{R}$ sur $\mathbb{Z}$ définie par $a\mathcal{R}b \Leftrightarrow a \leq b + 1$.
- 3) La relation $<$ sur $\mathbb{R}$.
- 4) La relation $\subseteq$ sur $\mathcal{P}(E)$.

Exercice 4. Graphes de relations.

- 1) Dessinez le graphe d'une relation sur l'ensemble $E = \{1, 2, 3\}$ qui est réflexive, mais non symétrique et non transitive.
- 2) De même, tracez le graphe d'une relation seulement symétrique.

Exercice 5. Propriétés des relations.

Pour chacune des relations suivantes, dites si elle est réflexive, symétrique ou transitive. Démontrez ensuite vos affirmations ou donnez des contre-exemples.

- 1) La relation $\mathcal{R}$ sur $\mathbb{Z}$ définie par $a\mathcal{R}b \Leftrightarrow a = b + 1$.
- 2) La relation $\mathcal{R}$ sur $\mathbb{R}$ définie par $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x + y = 0$.
- 3) La relation $\mathcal{R}$ sur $\mathbb{R}$ définie par $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x^2 - y^2 = x - y$.

2 Relations d'équivalence

Exercice 6. Relations d'équivalence.

Les relations suivantes sont-elles des relations d'équivalence ?

- 1) La relation d'égalité sur $\mathbb{Z}$.
- 2) La relation « est du même signe que » sur $\mathbb{R}$.
- 3) La relation « est du même signe que » sur $\mathbb{R}^*$.

2.1 Classes d'équivalence

Exercice 7. Classes d'équivalence.

- 1) Explicitez les classes d'équivalence de 0 et 1 pour la relation $\simeq$ définie sur $\llbracket 0, 4 \rrbracket$ par $a \simeq b \Leftrightarrow (2 \text{ divise } b - a)$.
- 2) Explicitez la classe d'équivalence d'un élément n pour la relation d'égalité sur $\mathbb{Z}$.
- 3) Explicitez la classe d'équivalence d'un élément z pour la relation $\simeq$ définie sur $\mathbb{R}$ par $x \simeq y \Leftrightarrow |x| = |y|$.
- 4) Explicitez la classe d'équivalence d'un élément z pour la relation $\simeq$ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$x \simeq y \Leftrightarrow x^2 - y^2 = x - y.$$

2.2 Ensemble quotient

Exercice 8. Ensemble quotient.

Considérons la relation d'équivalence $\simeq$ définie sur $\llbracket -3, 5 \rrbracket$ par $a \simeq b \Leftrightarrow (4 \text{ divise } b - a)$. Explicitez l'ensemble quotient $\llbracket -3, 5 \rrbracket / \simeq$.

Exercice 9. Quotient d'un jeu de cartes.

Dans un jeu de 32 cartes, les cartes sont réparties selon quatre *enseignes* : pique $\spadesuit$, cœur $\heartsuit$, trèfle $\clubsuit$ et carreau $\diamondsuit$. Chaque enseigne comporte donc 8 cartes distinguées par leur *rang* : 7, 8, 9, 10, Valet, Dame, Roi et As. En posant

$$\mathcal{R} = \{7, 8, 9, 10, V, D, R, A\} \quad \text{et} \quad \mathcal{E} = \{\spadesuit, \heartsuit, \clubsuit, \diamondsuit\},$$

un jeu de cartes peut être représenté comme le produit cartésien $\mathcal{R} \times \mathcal{E}$. Par exemple, $(A, \spadesuit)$ représente l'as de pique. Pour chacune des relations suivantes, explicitez en langage formel l'ensemble quotient. Pensez à utiliser les produits cartésiens, par exemple $\mathcal{R} \times \{\spadesuit, \heartsuit\}$ désigne l'ensemble de tous les piques et de tous les cœurs.

- 1) La relation « est dans la même enseigne que ».
- 2) La relation « a le même rang que ».
- 3) La relation « a la même couleur que ».

Exercice 10. Partitions.

- 1) Donnez quatre partitions de $\{1, 2, 3, 4\}$.
- 2) Donnez trois partitions de $\mathbb{Z}$.

Exercice 11. Partitions.

Dans chacun des cas suivants, dites si l'ensemble $\mathcal{X}$ est une partition de E .

- 1) $E = \{0, 1, 2, 3\}$, $\mathcal{X} = \{\{0, 2\}, \{1\}, \{3\}\}$.
- 2) $E = [0, 2]$, $\mathcal{X} = \{]0, 2[, \{0, 1, 2\}\}$.
- 3) $E = [0, 3[$, $\mathcal{X} = \{[0, 1[, [1, 2[, [1, 3[\}$.
- 4) $E = [0, 5]$, $\mathcal{X} = \{]0, 2[,]2, 4[,]4, 5], \{0, 2, 4\}\}$.
- 5) $E = \mathbb{N}$, $\mathcal{X} = \{[2^n, 2^{n+1} - 1] \mid n \in \mathbb{N}\}$.
- 6) $E = \mathbb{R}$, $\mathcal{X} = \{\mathbb{Q}, \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}$.
- 7) $E = \mathbb{Z}$, $\mathcal{X} = \{a + 3\mathbb{Z} \mid a \in \mathbb{Z}\}$.