

Espaces vectoriels

Exercice 1. Généralités sur les sous-espaces

On considère le sous-ensemble F de $\mathbb{R}^3$ suivant :

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + z = 0\}.$$

- 1) Montrez que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
- 2) Montrez que la famille $\mathcal{F} = ((1, 1, 0), (-1, 0, 1))$ est une famille génératrice de F .
- 3) Donnez une base du sous-espace F .
- 4) Donnez la dimension de F et le rang de la famille $\mathcal{F}$.

Exercice 2. Sous-espace de matrices

On considère l'ensemble

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 2c & a & b \\ 2b & 2c & a \end{pmatrix} \mid (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\}.$$

Montrez que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et précisez sa dimension et une base.

Exercice 3. Espace vectoriel de matrices

On considère l'ensemble

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a+b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

- 1) L'ensemble E est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$? Si oui, déterminez une base de E . Justifiez votre réponse.
- 2) Soient A et A' deux matrices dans E . Montrez que le produit $A \times A'$ reste dans E .
- 3) Soit A une matrice dans E . Montrez par récurrence que pour tout entier naturel n , on a $A^n \in E$.

Exercice 4. Espace engendré

Soit F le sous-espace de $\mathbb{R}^4$ engendré par $u = (1, 0, -1, 2)$ et $v = (0, 1, 0, 1)$. Déterminez les réels x et y tels que $w = (3, 7, x, y)$ soit dans F .

Exercice 5. Base et algorithme de Gauss

Déterminez les scalaires a , b et c de $\mathbb{R}$ tels que la famille $\mathcal{F} = ((1, 0, 0), (1, 2, 3), (a, b, c))$ soit une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 6. La famille, ça compte

On considère les cinq vecteurs de $\mathbb{R}^4$ définis ci-après.

$$e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad e_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_5 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquez si elle est vraie ou fausse en justifiant votre réponse.

- 1) La famille (e_1, e_2, e_3, e_4) est libre.
- 2) La famille (e_1, e_2, e_3) est liée.
- 3) La famille (e_1, e_2, e_5) est une base de $\mathbb{R}^4$.
- 4) La famille (e_1, e_3, e_5) engendre un espace vectoriel de dimension 2.
- 5) La famille (e_1, e_4) est libre.
- 6) La famille (e_1, e_4, e_5) est liée.
- 7) On peut créer une base de $\mathbb{R}^4$ en n'utilisant que certains des vecteurs $e_1, \dots, e_5$.

Exercice 7. Vive le pivot de Gauss !

On considère dans $\mathbb{R}$ le système d'équations (S) ainsi que les vecteurs v_1, v_2, v_3 et v_4 de $\mathbb{R}^4$ définis ci-après :

$$(S) = \begin{cases} 3x + 2z = 0 \\ 3y + z + 3t = 0 \\ x + y + z + t = 0 \\ 2x - y + z - t = 0 \end{cases} \quad \begin{aligned} v_1 &= (3, 0, 2, 0), \\ v_2 &= (0, 3, 1, 3), \\ v_3 &= (1, 1, 1, 1), \\ v_4 &= (2, -1, 1, -1). \end{aligned}$$

- 1) Déterminez l'ensemble E des solutions du système (S) .
- 2) L'ensemble E est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$? Si oui, donnez une base de E . Justifiez votre réponse.
- 3) À l'aide des questions précédentes, calculez la dimension de $\text{Vect}(v_1, v_2, v_3, v_4)$ puis donnez une base de $\text{Vect}(v_1, v_2, v_3, v_4)$.
- 4) La matrice $M \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ dont la ligne i est formée par le vecteur v_i est-elle inversible? Si oui, déterminez son inverse. Sinon, justifiez.