

Révisions

1 Espaces vectoriels

Exercice 1. Généralités sur les sous-espaces.

On considère le sous-ensemble F de $\mathbb{R}^3$ suivant :

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + z = 0\}.$$

- 1) Montrez que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
- 2) Montrez que la famille $\mathcal{F} = ((1, 1, 0), (-1, 0, 1))$ est une famille génératrice de F .
- 3) Donnez une base du sous-espace F .
- 4) Donnez la dimension de F et le rang de la famille $\mathcal{F}$.

Exercice 2. Sous-espace de matrices.

On considère l'ensemble

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 2c & a & b \\ 2b & 2c & a \end{pmatrix} \mid (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\}.$$

Montrez que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et précisez sa dimension et une base.

Exercice 3. Espace vectoriel de matrices.

On considère l'ensemble

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a+b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

- 1) L'ensemble E est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$? Si oui, déterminez une base de E . Justifiez votre réponse.
- 2) Soient A et A' deux matrices dans E . Montrez que le produit $A \times A'$ reste dans E .
- 3) Soit A une matrice dans E . Montrez par récurrence que pour tout entier naturel n , on a $A^n \in E$.

Exercice 4. Espace engendré.

Soit F le sous-espace de $\mathbb{R}^4$ engendré par $u = (1, 0, -1, 2)$ et $v = (0, 1, 0, 1)$. Déterminez les réels x et y tels que $w = (3, 7, x, y)$ soit dans F .

Exercice 5. Base et algorithme de Gauss.

Déterminez les scalaires a , b et c de $\mathbb{R}$ tels que la famille $\mathcal{F} = ((1, 0, 0), (1, 2, 3), (a, b, c))$ soit une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 6. La famille, ça compte.

On considère les cinq vecteurs de $\mathbb{R}^4$ définis ci-après.

$$e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad e_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_5 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Indiquez si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses en justifiant votre réponse.

- 1) La famille (e_1, e_2, e_3, e_4) est libre.
- 2) La famille (e_1, e_2, e_3) est liée.
- 3) La famille (e_1, e_2, e_5) est une base de $\mathbb{R}^4$.
- 4) La famille (e_1, e_3, e_5) engendre un espace vectoriel de dimension 2.
- 5) La famille (e_1, e_4) est libre.
- 6) La famille (e_1, e_4, e_5) est liée.
- 7) On peut créer une base de $\mathbb{R}^4$ en n'utilisant que certains des vecteurs $e_1, \dots, e_5$.

Exercice 7. Vive le pivot de Gauss !.

On considère dans $\mathbb{R}$ le système d'équations (S) ainsi que les vecteurs v_1, v_2, v_3 et v_4 de $\mathbb{R}^4$ définis ci-après :

$$(S) = \begin{cases} 3x + 2z = 0 \\ 3y + z + 3t = 0 \\ x + y + z + t = 0 \\ 2x - y + z - t = 0 \end{cases} \quad \begin{aligned} v_1 &= (3, 0, 2, 0), \\ v_2 &= (0, 3, 1, 3), \\ v_3 &= (1, 1, 1, 1), \\ v_4 &= (2, -1, 1, -1). \end{aligned}$$

- 1) Déterminez l'ensemble E des solutions du système (S) .
- 2) L'ensemble E est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$? Si oui, donnez une base de E . Justifiez votre réponse.
- 3) À l'aide des questions précédentes, calculez la dimension de $\text{Vect}(v_1, v_2, v_3, v_4)$ puis donnez une base de $\text{Vect}(v_1, v_2, v_3, v_4)$.
- 4) La matrice $M \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ dont la ligne i est formée par le vecteur v_i est-elle inversible? Si oui, déterminez son inverse. Sinon, justifiez.

2 Applications linéaires

Exercice 8. Linéaire ou pas ?.

Déterminez si les applications suivantes sont linéaires en justifiant vos réponses. Si possible, déterminez la matrice de l'application dans la base canonique.

- 1) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (2x - y, y + 1)$.
- 2) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, (x, y) \mapsto (-x, 0, 3x)$.
- 3) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x^2 - y^2$.
- 4) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \sin(x + y)$.
- 5) $f : \mathbb{K}_2[X] \rightarrow \mathbb{K}_2[X], P \mapsto P'$.
- 6) $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{K}), A \mapsto A + B$ avec $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.
- 7) $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_2(\mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{K}), (A, B) \mapsto A + B$.
- 8) $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{K}), A \mapsto A^\top$.

- 9) $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto \bar{z}$, en considérant $\mathbb{C}$ en tant que $\mathbb{R}$ espace-vectoriel puis en tant que $\mathbb{C}$ -espace vectoriel.

Exercice 9. Détermination de noyau et d'image.

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et f un endomorphisme de E déterminé par sa matrice M dans la base canonique de E . Pour chacun des endomorphismes suivants, calculez l'image d'un élément quelconque de E et déterminez le noyau et l'image de f .

1) $E = \mathbb{R}^2$ et $M = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

3) $E = \mathbb{R}^2$ et $M = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

2) $E = \mathbb{R}^3$ et $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

4) $E = \mathbb{R}^3$ et $M = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 10. Composée d'applications.

On définit les applications linéaires suivantes :

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(x, y) \mapsto (2x, y - x, x + 2y)$$

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$x \mapsto (2x, -x)$$

$$h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y, z) \mapsto (2x - y, x + 3z)$$

- Déterminez les matrices des applications f , g et h .
- En utilisant la forme algébrique et la forme matricielle des applications précédentes, déterminez toutes les composées d'application $F_1 \circ F_2$ qu'il est possible de réaliser, avec F_1 et F_2 dans $\{f, g, h\}$.

Exercice 11. Synthèse.

On note (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et on considère l'application linéaire f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par la matrice suivante.

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

- Calculez $f(2e_1 - 3e_2 + 5e_3)$.
- Déterminez $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$.
- Calculez M^2 et M^3 puis simplifiez le produit $(\text{Id}_3 - M)(\text{Id}_3 + M + M^2)$.
- En déduire que $\text{Id}_3 - M$ est inversible et préciser $(\text{Id}_3 - M)^{-1}$.

Pour aller plus loin

Exercice 12. Base d'un espace produit.

Soient E, F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimensions finies. Notons $\mathcal{B}_E = (e_1, \dots, e_m)$ et $\mathcal{B}_F = (f_1, \dots, f_n)$ des bases de E et F respectivement. Donnez une base du produit $E \times F$ et prouvez qu'elle est bien libre et génératrice.

Exercice 13. Caractérisation d'une application linéaire.

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels et f une application de E dans F . Montrez que f est linéaire si et seulement si pour tous vecteurs u, v de E et tous scalaires λ, μ on a

$$f(\lambda u + \mu v) = \lambda f(u) + \mu f(v).$$

Exercice 14. Le ibijau, c'est bon !.

Un biculteur¹ dispose de deux forêts F_1 et F_2 pour l'élevage de ses ibijaux. Tous les ans, à la même période, il vide F_2 en vendant les ibijaux que contenait F_2 et transfère tous les ibijaux de F_1 dans F_2 . La vente de chaque ibijau de F_2 permet alors l'achat de deux petits ibijaux destinés à F_1 . En outre, le biculteur achète aussi 200 ibijaux en plus pour F_1 et 100 ibijaux en plus pour F_2 .

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on note respectivement a_n et b_n les effectifs d'ibijaux de F_1 et F_2 au bout de n années. Initialement, le nombre d'ibijaux a_0 présents dans le bassin F_1 vaut 200 et le nombre d'ibijaux b_0 présents dans le bassin F_2 vaut 100.

On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} -400 \\ -300 \end{pmatrix}$ ainsi que $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ pour n dans $\mathbb{N}$.

- 1) Calculez a_1 et b_1 .
- 2) Expliquez pourquoi l'égalité $X_{n+1} = AX_n + B$ est vraie pour tout entier naturel n .
- 3) Pour tout x de $\mathbb{R}$ et tout y de $\mathbb{R}$, démontrez l'équivalence suivante :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + B \iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C.$$

- 4) Pour n dans $\mathbb{N}$, on pose $Y_n = X_n - C$. Vérifiez que $Y_{n+1} = AY_n$ pour tout n de $\mathbb{N}$.
- 5) À l'aide d'un raisonnement par récurrence, prouvez : $\forall n \in \mathbb{N}, Y_n = A^n Y_0$.
- 6) Conjecturez une expression de A^n pour tout n de $\mathbb{N}$ puis démontrez la conjecture.
- 7) En déduire les expressions de a_n et b_n en fonction de n pour tout entier naturel n .
- 8) Déterminez la limite de la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et la limite de la suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$. La modélisation choisie pour étudier l'élevage est-elle réaliste ? Justifiez.
- 9) Si chacun des forêts a une capacité limitée à 10 000 ibijaux, durant combien d'années le biculteur pourra-t-il procéder comme décrit initialement ?

Exercice 15. Noyau et invariants.

On définit l'application g de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ pour tous réels (x, y, z) dans $\mathbb{R}^3$ par

$$g(x, y, z) = (z - y, z - x, 2z - x - y).$$

- 1) Montrer que l'application g est linéaire.

On note F l'ensemble des vecteurs *invariants* par g , c'est-à-dire l'ensemble des éléments $\vec{u}$ de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $g(u) = u$. Par ailleurs, on pose $G = \text{Ker}(g)$.

- 2) Montrez que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Déterminez ensuite une base de F .
- 3) Reprendre la question précédente pour G .
- 4) Montrez que les vecteurs utilisés pour la base de F et la base de G permettent de former une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 16. Synthèse.

Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ dont la matrice canoniquement associée est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

On considère également les vecteurs u et v définis par $u = (0, 1, -2)$ et $v = (0, 1, -1)$.

1. Éleveur d'ibijaux bios de plein air.

- 1) Calculez $f(u)$ puis exprimer $f(v)$ en fonction de u et v .
- 2) Déterminez une base de $\text{Ker}(f)$ et une base de $\text{Im}(f)$.
- 3) Pourquoi peut-on affirmer que la fonction f n'est pas bijective?
- 4) Déterminez tous les vecteurs w de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $f(w) = v + w$.
- 5) Donnez l'expression algébrique de $f \circ f$.

Exercice 17. Synthèse.

Soit (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On définit l'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ en posant, pour x, y et z dans $\mathbb{R}$: $f(x, y, z) = (x + 6y - z, x + z, x - 3y + 2z)$.

- 1) Donnez la matrice A associée à l'application f .
- 2) Montrez que les sous-espaces vectoriels $\text{Ker}(f)$ et $\text{Ker}(f - 3\text{Id}_3)$ sont de dimension 1. Donner une base de chacun de ces sous-espaces.
- 3) Que vaut le rang de f ? *Aucun calcul n'est nécessaire.*
- 4) Donnez une base de $\text{Im}(f)$ ainsi qu'une équation cartésienne de $\text{Im}(f)$.
- 5) Donnez la matrice associée à l'application $f \circ f$.
- 6) Montrez que $\text{Ker}(f \circ f)$ est un sous-espace vectoriel de dimension 2 qui contient $\text{Ker}(f)$.

Exercice 18. Pour aller plus loin.

Pour tout (x, y, z) dans $\mathbb{R}^3$, on pose : $f(x, y, z) = (-2x - 2y + 3z, x + y - z, -x - y + z)$. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose également $f^{n+1} = f \circ f^n$.

- 1) Montrez que f est une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$.
- 2) Déterminez la dimension et une base de $\text{Ker}(f)$. L'application f est-elle injective?
- 3) Même question pour $\text{Im}(f)$ et la surjectivité de f .
- 4) Vérifiez que l'égalité $f^3 = -f$ est vraie et en déduire les valeurs de f^4 et f^5 . Combien d'éléments possède l'ensemble $\{f^n, n \in \mathbb{N}^*\}$?
- 5) Calculez les produits de composition $g \circ h$ pour g et h dans l'ensemble $\{f, f^2, f^3, f^4\}$.
On pourra présenter les résultats sous la forme d'un tableau à double entrée.
- 6) Montrez les égalités suivantes :

$$\text{Ker}(f) = \text{Ker}(f^2) = \text{Ker}(f^3) = \text{Ker}(f^4) \quad \text{et} \quad \text{Im}(f) = \text{Im}(f^2) = \text{Im}(f^3) = \text{Im}(f^4).$$

Exercice 19. Démonstration de la proposition (image de familles).

Soit f une application linéaire de E dans F .

- 1) Montrez que l'image par f d'une famille liée de E est une famille liée de F .
- 2) Montrez que l'image par f de toute famille libre de E est une famille libre de F si et seulement si f est injective.
- 3) Montrez que l'image par f d'une partie génératrice de E est une partie génératrice de $\text{Im}(f)$.