

## Correction — Modèles de rédaction sur les Suites

### Exercice 1 (calcul des termes d'une suite).

#### Solution

$$\mathbf{1a)} \quad u_n = \frac{n+1}{2n+1} = f(n) \text{ avec } f(x) = \frac{x+1}{2x+1}, D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{1}{2} \right\}$$

$$u_0 = 1 \quad u_1 = \frac{2}{3} \quad u_2 = \frac{3}{5} \quad u_3 = \frac{4}{7} \quad u_4 = \frac{5}{9}$$

$$\mathbf{1b)} \quad u_n = \frac{1}{n-4} = f(n) \text{ avec } f(x) = \frac{1}{x-4}, D_f = \mathbb{R} \setminus \{4\}$$

$$u_5 = 1 \quad u_6 = \frac{1}{2} \quad u_7 = \frac{1}{3} \quad u_8 = \frac{1}{4} \quad u_9 = \frac{1}{5}$$

$$\mathbf{1c)} \quad u_n = (-1)^n = f(n) \text{ avec } f(x) = (-1)^x, D_f = \mathbb{R}$$

$$u_0 = 1 \quad u_1 = -1 \quad u_2 = 1 \quad u_3 = -1 \quad u_4 = 1$$

$$\mathbf{1d)} \quad u_n = \frac{2^n}{n^2} = f(n) \text{ avec } f(x) = \frac{2^x}{x^2}, D_f = \mathbb{R}^*$$

$$u_1 = 2 \quad u_2 = 1 \quad u_3 = \frac{8}{9} \quad u_4 = 1 \quad u_5 = \frac{32}{25}$$

$$\mathbf{1e)} \quad \begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 2u_n + 1 \end{cases}$$

$$u_0 = 1 \quad u_1 = 3 \quad u_2 = 7 \quad u_3 = 15 \quad u_4 = 31$$

$$\mathbf{1f)} \quad \begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{1}{u_n} \end{cases}$$

$$u_1 = \frac{1}{3} \quad u_2 = 3 \quad u_3 = \frac{1}{3} \quad u_4 = 3$$

$$\mathbf{1g)} \quad \begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = (n+1)u_n \end{cases}$$

$$u_0 = 1 \quad u_1 = 1 \quad u_2 = 2 \quad u_3 = 6 \quad u_4 = 24$$

$$\mathbf{2)} \quad u_n = \frac{n+1}{2n+1}$$

$$u_{n+1} = \frac{(n+1)+1}{2(n+1)+1} = \frac{n+2}{2n+3}$$

$$u_{2n} = \frac{2n+1}{2(2n)+1} = \frac{2n+1}{4n+1}$$

**Exercice 2** (définition suite arithmétique).

**Solution**

a)  $\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} - u_n = -\frac{(n+1)+4}{3} - \left(-\frac{n+4}{3}\right) = \frac{-n-5+n+4}{3} = -\frac{1}{3}$

Donc  $(u_n)$  est une suite arithmétique de raison  $r = -\frac{1}{3}$  et de terme initial  $u_0 = -\frac{4}{3}$ .

b)

$$\begin{aligned} u_0 &= 1, \quad u_1 = \frac{3}{2}, \quad u_2 = \frac{7}{3} \\ u_1 - u_0 &= \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2} & u_2 - u_1 &= \frac{7}{3} - \frac{3}{2} = \frac{5}{6} \\ u_1 - u_0 &\neq u_2 - u_1 \end{aligned}$$

Donc  $(u_n)$  n'est pas une suite arithmétique.

c)  $\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} - u_n = 4$

Donc  $(u_n)$  est une suite arithmétique de raison  $r = 4$  et de terme initial  $u_0 = 1$ .

d)

$$\begin{aligned} u_0 &= 1, \quad u_1 = \frac{1}{2}, \quad u_2 = \frac{1}{4} \\ u_1 - u_0 &= -\frac{1}{2} & u_2 - u_1 &= -\frac{1}{4} \\ u_1 - u_0 &\neq u_2 - u_1 \end{aligned}$$

Donc  $(u_n)$  n'est pas une suite arithmétique.

**Exercice 3** (terme général suite arithmétique).

**Solution**

a)  $u_n = u_0 + nr = 3 + 2n$

b)  $u_n = u_2 + (n-2)r = -3 + (n-2) \times \left(-\frac{3}{4}\right) = -\frac{3}{4}n - \frac{3}{2}$

c)

$$\begin{aligned} r &= \frac{u_3 - u_0}{3 - 0} = \frac{4 - \left(-\frac{1}{2}\right)}{3} = \frac{3}{2} \\ u_n &= u_0 + nr = \frac{3}{2}n - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

**Exercice 4** (définition suite géométrique).

**Solution**

a)  $\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = 5^{2(n+1)} = 5^{2n+2} = 5^{2n} \times 5^2 = 25 \times u_n$

Donc  $(u_n)$  est une suite géométrique de raison  $q = 25$  et de terme initial  $u_0 = 1$ .

**b)**  $u_0 = 1, u_1 = \frac{5}{4}, u_2 = \frac{3}{2}$ . Comme  $u_0$  et  $u_1$  ne sont pas nuls, on peut calculer les quotients :

$$\frac{u_1}{u_0} = \frac{5}{4} \quad \text{et} \quad \frac{u_2}{u_1} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{5}{4}} = \frac{6}{5} \quad \Rightarrow \quad \frac{u_1}{u_0} \neq \frac{u_2}{u_1}$$

**Donc  $(u_n)$  n'est pas une suite géométrique.**

**c)**  $u_0 = -2, u_1 = 4, u_2 = 16$ . Comme  $u_0$  et  $u_1$  ne sont pas nuls :

$$\frac{u_1}{u_0} = \frac{4}{-2} = -2 \quad \text{et} \quad \frac{u_2}{u_1} = \frac{16}{4} = 4 \quad \Rightarrow \quad \frac{u_1}{u_0} \neq \frac{u_2}{u_1}$$

**Donc  $(u_n)$  n'est pas une suite géométrique.**

**d)**  $\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n$

**Donc  $(u_n)$  est une suite géométrique de raison  $q = -\frac{1}{2}$  et de terme initial  $u_0 = 1$ .**

**Exercice 5** (terme général suite géométrique).

**Solution**

**a)**  $u_n = u_0 \times q^n = 3 \times 2^n$

**b)**  $u_n = u_2 \times q^{n-2} = -3 \times \left(-\frac{3}{4}\right)^{n-2}$

**c)**

$$u_3 = u_0 \times q^3 \Leftrightarrow -32 = -4 \times q^3 \Leftrightarrow q^3 = 8 \Leftrightarrow q = 2$$

$$u_n = u_0 \times q^n = -4 \times 2^n$$

**Exercice 6** (somme de termes d'une suite géométrique).

**Solution**

$S$  est la somme de 8 termes consécutifs d'une suite géométrique de raison  $r = 3$  et de terme initial  $u_0 = 1$  :

$$S = \sum_{k=0}^7 u_k = 1 \times \frac{1 - 3^8}{1 - 3} = \frac{1 - 6561}{-2} = \frac{-6560}{-2}$$

$$S = 3280$$

**Exercice 7** (problème avec suite arithmétique).

**Solution**

**1)**  $p_2 = p_1 + 40 = 200 + 40 = 240 \quad p_3 = p_2 + 40 = 240 + 40 = 280$

**2)**  $\forall n \in \mathbb{N}^* : p_{n+1} = p_n + 40$

**3)** Ainsi  $(p_n)$  est une suite arithmétique de raison  $r = 40$  et de premier terme  $p_1 = 200$ .

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : p_n = p_1 + (n - 1)r = 200 + (n - 1) \times 40 = 40n + 160$$

4)  $p_{12} = 40 \times 12 + 160 = 640$ . L'artisan a fabriqué **640 santons** en décembre.

5) On calcule le nombre total de santons fabriqués entre janvier et décembre :

$$S = p_1 + p_2 + \dots + p_{12} = 12 \times \frac{p_1 + p_{12}}{2} = 12 \times \frac{200 + 640}{2} = 5040$$

**Donc l'artisan pourra honorer une commande de 5 000 santons fin décembre.**

**Exercice 8** (problème avec suite géométrique).

**Solution**

1)  $u_1 = u_0 \times 0,85 = 50\,000 \times 0,85 = 42\,500$      $u_2 = u_1 \times 0,85 = 42\,500 \times 0,85 = 36\,125$

2)  $\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = 0,85 u_n$

**Donc  $(u_n)$  est une suite géométrique de raison  $q = 0,85$  et de premier terme  $u_0 = 50\,000$ .**

3)  $\forall n \in \mathbb{N} : u_n = u_0 \times q^n = 50\,000 \times 0,85^n$

4) En 2022 :  $n = 2022 - 2015 = 7$

$$u_7 = 50\,000 \times 0,85^7 \approx 16\,029$$

**La valeur de la machine en 2022 est d'environ 16 029 euros.**

5) Comme  $u_0 > 0$  et  $0 < q < 1$ ,  $(u_n)$  est décroissante.

$$u_{14} = 50\,000 \times 0,85^{14} \approx 5\,138 > 5\,000$$

$$u_{15} = 50\,000 \times 0,85^{15} \approx 4\,368 < 5\,000$$

**La valeur de la machine sera inférieure à 5 000 euros en 2030 (année 2015 + 15).**

**Exercice 9** (problème se ramenant à une suite géométrique).

**Solution**

Augmenter de 4 % revient à multiplier par 1,04.

1)  $C_0 = 1\,000$

$$C_1 = C_0 \times 1,04 + 50 = 1\,000 \times 1,04 + 50 = 1\,090$$

$$C_2 = C_1 \times 1,04 + 50 = 1\,090 \times 1,04 + 50 = 1\,183,6$$

2)

$$C_1 - C_0 = 90 \text{ et } C_2 - C_1 = 93,6 : \text{différences inégales} \rightarrow \text{non arithmétique.}$$

$$\frac{C_1}{C_0} = 1,09 \text{ et } \frac{C_2}{C_1} \approx 1,086 : \text{quotients inégaux} \rightarrow \text{non géométrique.}$$

3)  $\forall n \in \mathbb{N} : C_{n+1} = 1,04 C_n + 50$

4a)

$$U_0 = C_0 + 1250 = 1\,000 + 1\,250 = 2\,250$$

$$U_1 = C_1 + 1250 = 1\,090 + 1\,250 = 2\,340$$

**4b)**  $\forall n \in \mathbb{N} :$

$$U_{n+1} = C_{n+1} + 1250 = 1,04 C_n + 50 + 1250 = 1,04(U_n - 1250) + 1300 = 1,04 U_n$$

**Ainsi  $(U_n)$  est une suite géométrique de raison  $q = 1,04$  et de premier terme  $U_0 = 2\,250$ .**

**4c)**

$$\forall n \in \mathbb{N} : U_n = U_0 \times q^n = 2\,250 \times 1,04^n$$

$$C_n = U_n - 1250 = 2\,250 \times 1,04^n - 1\,250$$

**4d)** En 2027 :  $n = 2027 - 2017 = 10$

$$C_{10} = 2\,250 \times 1,04^{10} - 1\,250 \approx 2\,080,55$$

**Le capital obtenu en 2027 sera d'environ 2 080,55 euros.**