

Fiche d'exercices supplémentaires 2

C.1 Des coordonnées des quatre points A, B, C, D , on en déduit :

- Le milieu K du segment $[AC]$ a pour coordonnées :

$$K\left(\frac{x_A + x_C}{2}; \frac{y_A + y_C}{2}\right) = \left(\frac{\frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{3}\right)}{2}; \frac{-\frac{3}{2} + \frac{15}{7}}{2}\right)$$

$$= \left(\frac{\frac{3}{6} - \frac{2}{6}}{2}; \frac{-\frac{21}{14} + \frac{30}{14}}{2}\right) = \left(\frac{\frac{1}{6}}{2}; \frac{\frac{9}{14}}{2}\right) = \left(\frac{1}{12}; \frac{9}{28}\right)$$

- Le milieu L du segment $[BD]$ a pour coordonnées :

$$L\left(\frac{x_B + x_D}{2}; \frac{y_B + y_D}{2}\right) = \left(\frac{-2 + \frac{13}{6}}{2}; \frac{0 + \frac{9}{14}}{2}\right)$$

$$= \left(\frac{-\frac{12}{6} + \frac{13}{6}}{2}; \frac{\frac{9}{14}}{2}\right) = \left(\frac{\frac{1}{6}}{2}; \frac{\frac{9}{14}}{2}\right) = \left(\frac{1}{12}; \frac{9}{28}\right)$$

Les diagonales du quadrilatère $ABCD$ se coupant en leurs milieux, on en déduit que $ABCD$ est un parallélogramme.

C.2 Les coordonnées des points E et F sont :

$$E(-1; -2) \quad ; \quad F(2,5; -1,5)$$

La mesure du segment $[EF]$ a pour valeur :

$$EF = \sqrt{(x_F - x_E)^2 + (y_F - y_E)^2}$$

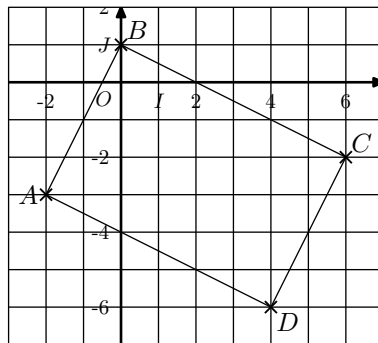
$$= \sqrt{[2,5 - (-1)]^2 + [-1,5 - (-2)]^2}$$

$$= \sqrt{(2,5+1)^2 + (-1,5+2)^2} = \sqrt{3,5^2 + 0,5^2}$$

$$= \sqrt{3,5^2 + 0,5^2} = \sqrt{12,25 + 0,25} = \sqrt{12,5}$$

C.3

1) Voici la représentation du quadrilatère :



2) a) On a les longueurs suivantes :

- $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$
- $= \sqrt{[0 - (-2)]^2 + [1 - (-3)]^2}$
- $= \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20}$

La longueur AB admet pour expression simplifiée :

$$AB = \sqrt{20} = \sqrt{2^2 \times 5} = 2\sqrt{5}$$

- $AD = \sqrt{(x_D - x_A)^2 + (y_D - y_A)^2}$
- $= \sqrt{[4 - (-2)]^2 + [-6 - (-3)]^2}$
- $= \sqrt{6^2 + (-3)^2} = \sqrt{36 + 9} = 3\sqrt{5}$

- $BC = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2}$
- $= \sqrt{(6 - 0)^2 + (-2 - 1)^2}$
- $= \sqrt{6^2 + (-3)^2} = \sqrt{36 + 9} = \sqrt{45}$

La longueur BC admet l'expression simplifiée :

$$BC = \sqrt{9 \times 5} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$

$$\begin{aligned}
 \bullet \quad CD &= \sqrt{(x_D - x_C)^2 + (y_D - y_C)^2} \\
 &= \sqrt{(4 - 6)^2 + [-6 - (-2)]^2} \\
 &= \sqrt{(-2)^2 + (-4)^2} = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20}
 \end{aligned}$$

La distance CD admet l'expression simplifiée :

$$CD = \sqrt{20} = \sqrt{2^2 \times 5} = 2\sqrt{5}$$

b) Le quadrilatère $ABCD$ a ses côtés opposés de même longueur : $ABCD$ est un parallélogramme.

3) Déterminons la mesure de la longueur de la diagonale $[AC]$:

$$\begin{aligned}
 AC &= \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} \\
 &= \sqrt{[6 - (-2)]^2 + [-2 - (-3)]^2} \\
 &= \sqrt{8^2 + 1^2} = \sqrt{65}
 \end{aligned}$$

$$\text{On a : } AC^2 = 65 \quad ; \quad AB^2 + BC^2 = 20 + 45 = 65$$

On remarque l'égalité suivante des carrés de longueurs :

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en B .

C.4

1) Les points A et B ayant pour abscisse 1, ces deux points appartiennent à la droite d'équation $x=1$.
On en déduit que la droite (AB) est parallèle à l'axe des ordonnées.

2) Déterminons la mesure du segment $[BC]$:

$$\begin{aligned}
 BC &= \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} \\
 &= \sqrt{(3,4 - 1)^2 + [0,2 - (-3)]^2} = \sqrt{2,4^2 + (0,2 + 3)^2} \\
 &= \sqrt{5,76 + 3,2^2} = \sqrt{5,76 + 10,24} = \sqrt{16} = 4
 \end{aligned}$$

On a les carrés des longueurs :

$$AB^2 = 25 \quad ; \quad AC^2 = 9 \quad ; \quad BC^2 = 16$$

On remarque l'égalité :

$$AB^2 = AC^2 + BC^2$$

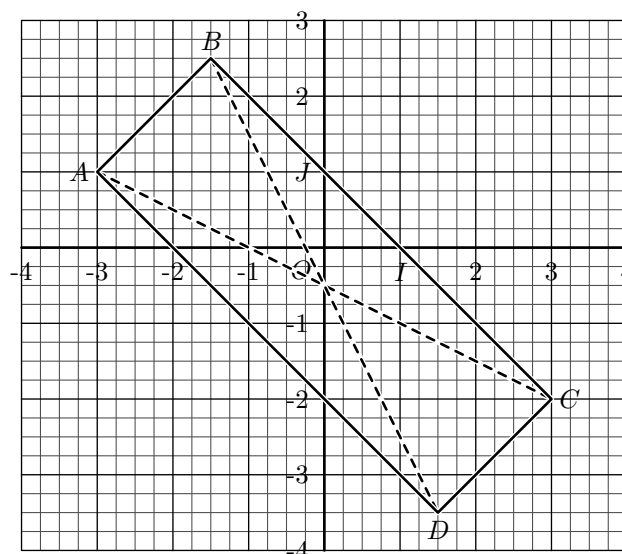
D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en C .

3) Notons K le milieu du segment $[BC]$. Le point K a pour coordonnées :

$$\begin{aligned}
 K\left(\frac{x_B + x_C}{2} ; \frac{y_B + y_C}{2}\right) &= \left(\frac{1 + 3,4}{2} ; \frac{-3 + 0,2}{2}\right) \\
 &= \left(\frac{4,4}{2} ; \frac{-2,8}{2}\right) = (2,2 ; -1,4)
 \end{aligned}$$

C.5

1)



2) On a :

$$\begin{aligned}
 AC &= \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{[3 - (-3)]^2 + (-2 - 1)^2} \\
 &= \sqrt{6^2 + (-3)^2} = \sqrt{36 + 9} = \sqrt{45}
 \end{aligned}$$

La longueur AC peut se simplifier par :

$$AC = \sqrt{45} = \sqrt{3^2 \times 5} = 3\sqrt{5}$$

③ Déterminons les longueurs AB et BC :

$$\bullet AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

$$= \sqrt{\left[-\frac{3}{2} - (-3)\right]^2 + \left(\frac{5}{2} - 1\right)^2} = \sqrt{\left(-\frac{3}{2} + \frac{6}{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{2} - \frac{2}{2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{18}{4}} = \sqrt{\frac{9}{2}} = \sqrt{4,5}$$

$$\bullet BC = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2}$$

$$= \sqrt{\left[3 - \left(-\frac{3}{2}\right)\right]^2 + \left(-2 - \frac{5}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{6}{2} + \frac{3}{2}\right)^2 + \left(-\frac{4}{2} - \frac{5}{2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{9}{2}\right)^2 + \left(-\frac{9}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{81}{4} + \frac{81}{4}} = \sqrt{\frac{162}{4}} = \sqrt{\frac{81}{2}} = \sqrt{40,5}$$

On a :

$$AB^2 = (\sqrt{4,5})^2 = 4,5 \quad ; \quad AC^2 = (\sqrt{45})^2 = 45$$

$$BC^2 = (\sqrt{40,5})^2 = 40,5$$

On remarque alors que : $AC^2 = AB^2 + BC^2$

D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en B .

④ Montrons que $ABCD$ est un parallélogramme ; plusieurs approches sont possibles, je préfère ici montrer que les diagonales ont même milieu :

• Milieu de $[AC]$:

$$\left(\frac{x_A + x_C}{2} ; \frac{y_A + y_C}{2}\right) = \left(\frac{(-3) + 3}{2} ; \frac{1 + (-2)}{2}\right)$$

$$= \left(0 ; -\frac{1}{2}\right)$$

• Milieu de $[BD]$:

$$\left(\frac{x_B + x_D}{2} ; \frac{y_B + y_D}{2}\right) = \left(\frac{-\frac{3}{2} + \frac{3}{2}}{2} ; \frac{\frac{5}{2} + \left(-\frac{7}{2}\right)}{2}\right)$$

$$= \left(0 ; -\frac{\frac{2}{2}}{2}\right) = \left(0 ; -\frac{1}{2}\right)$$

On en déduit que les deux diagonales ont même milieu.

Si un quadrilatère a ses diagonales qui se coupent en leurs milieux alors ce quadrilatère est un parallélogramme.
 $ABCD$ est un parallélogramme.

D'après la question ③, l'angle $\widehat{ABC}$ est un angle droit.

Si un parallélogramme possède un angle droit alors c'est un rectangle.

$ABCD$ est un rectangle.

C.6

① On a :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

$$= \sqrt{(-3 - 2)^2 + (-1 - 1)^2}$$

$$= \sqrt{(-5)^2 + (-2)^2} = \sqrt{25 + 4} = \sqrt{29}$$

② Les coordonnées du point K , milieu du segment $[AC]$, sont données par la formule :

$$K\left(\frac{x_A + x_C}{2} ; \frac{y_A + y_C}{2}\right) = \left(\frac{2 + 1}{2} ; \frac{1 + (-3)}{2}\right)$$

$$= \left(\frac{3}{2} ; -\frac{2}{2}\right) = \left(\frac{3}{2} ; -1\right)$$

③ En utilisant la propriété suivante :

“Si un quadrilatère est un parallélogramme alors ses diagonales se coupent en leurs milieux.”

Il est donc nécessaire que le point D soit placé tel que les deux diagonales $[AC]$ et $[BD]$ aient pour milieux le point K .

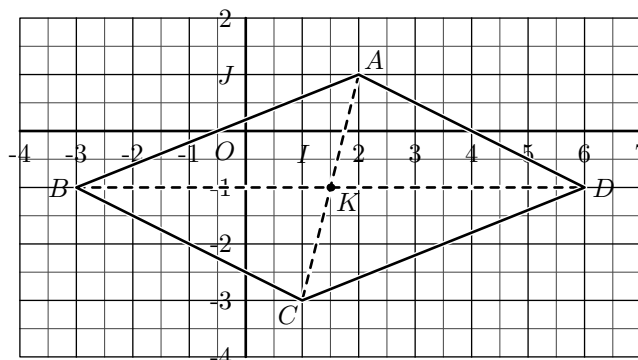
K étant le milieu du segment $[BD]$, on a :

$$K(x_K ; y_K) = \left(\frac{x_B + x_D}{2} ; \frac{y_B + y_D}{2}\right)$$

On en éduit les deux équations suivantes :

$$\begin{array}{l|l}
 x_K = \frac{x_B + x_D}{2} & y_K = \frac{y_B + y_D}{2} \\
 \frac{3}{2} = \frac{(-3) + x_D}{2} & -1 = \frac{(-1) + y_D}{2} \\
 3 = -3 + x_D & -2 = -1 + y_D \\
 x_D = 6 & -1 = 1
 \end{array}$$

Le point D a pour coordonnée $(6; -1)$.



C.7

1 Un cercle est l'ensemble des points situés à une même distance du centre du cercle. Ainsi, déterminons les distances suivantes :

- $$\begin{aligned}
 AB &= \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} \\
 &= \sqrt{(6 - 3)^2 + (-1 - 1)^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} \\
 &= \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5
 \end{aligned}$$

Le point A étant le centre du cercle $\mathcal{C}$ et la distance AB étant égale au rayon du cercle, on en déduit que le point B appartient au cercle $\mathcal{C}$.

- $$\begin{aligned}
 AC &= \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} \\
 &= \sqrt{(2 - 3)^2 + (-3 - 1)^2} = \sqrt{(-1)^2 + 5^2} \\
 &= \sqrt{1 + 25} = \sqrt{26}
 \end{aligned}$$

On en déduit : $AC \neq 5$ car $\sqrt{26} \neq \sqrt{25} = 5$

On en déduit que le segment $[AC]$ ne forme pas un rayon du cercle $\mathcal{C}$: le point C n'appartient pas au cercle $\mathcal{C}$.

2 Voici la représentation du repère, des points A , B , C et du cercle $\mathcal{C}$:

