

(13)

2024-2025 DS1 - Suites et récurrence.

Ex 1 1a)

$u_0 = 1240$ car au début 2017, il y a 1240 renards dans le parc.

① $u_{m+1} = 0,85 u_m + 30$
 car $\rightarrow$ Chaque année, le nb de renard diminue de 15%, donc est multiplié par $1 - \frac{15}{100} = 0,85$
 $\rightarrow$ on ré-introduit 30 renard chaque année.

b) Il faut calculer u_1 car 2018 = 2017 + 1
 $u_1 = 0,85 \times 1240 + 30 = 1084$
 Début 2018, il y aura 1084 renards.

2a) Je pose $P_m: "200 \leq u_{m+1} \leq u_m \leq 1240"$ ($m \in \mathbb{N}$)

Initialisation: $u_1 = 1084$ et $u_0 = 1240$.
 Donc $200 \leq u_1 \leq u_0 \leq 1240$
 P_0 est vraie.

Hérédité: Je suppose que P_m est vraie à un rang m fixe ($m \in \mathbb{N}$)
 A-t-on $200 \leq u_{m+1} \leq u_m \leq 1240$ d'après l'hypothèse de récurrence?

donc $0,85 \times 200 \leq 0,85 u_{m+1} \leq 0,85 u_m \leq 0,85 \times 1240$

donc $170 + 30 \leq 0,85 u_{m+1} + 30 \leq 0,85 u_m + 30 \leq 1054 + 30$

donc $200 \leq u_{m+2} \leq u_{m+1} \leq 1084$

donc $200 \leq u_{m+2} \leq u_{m+1} \leq 1240$ car $1084 < 1240$

Ainsi, P_{m+1} est vraie; et on a bien $P_m \Rightarrow P_{m+1}$

Conclusion D'après le principe de récurrence, $\forall m \in \mathbb{N}, 200 \leq u_{m+1} \leq u_m \leq 1240$

b) $\forall m \in \mathbb{N}, u_{m+1} \leq u_m$ donc (u_m) est décroissante.

Le nombre de renards va diminuer régulièrement.

① Penaliser toute allusion à une limite; ce n'est pas le sujet de la question.

② c) $\forall m \in \mathbb{N}, u_m \geq 200$, donc l'avis est bon!

3a) $\forall m \in \mathbb{N}, v_{m+1} = u_{m+1} - 200$ d'après l'énoncé

$$= 0,85 u_m + 30 - 200$$

$$= 0,85 (u_m + 200) - 170$$

$$= 0,85 v_m + 170 - 170$$

$$= 0,85 v_m$$

Donc (v_m) est géométrique de raison 0,85.

b) Donc $\forall m \in \mathbb{N}, v_m = v_0 \times q^m = v_0 \times 0,85^m$.

Or $v_0 = u_0 - 200 = 1240 - 200 = 1040$. Donc $\forall m \in \mathbb{N}, v_m = 1040 \times 0,85^m$

Donc $\forall m \in \mathbb{N}, u_m = 1040 \times 0,85^m + 200$

c) 2030 - 2017 = 13. $u_{13} = 1040 \times 0,85^{13} + 200 \approx 325,7$.

Il y aura environ 326 renards dans le parc en 2030

Exercice 2 1)

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{m+1} = u_m^2 + 3 \end{cases}, m \in \mathbb{N}.$$

$$u_1 = u_0^2 + 3 = 1^2 + 3 = 4.$$

$$u_2 = u_1^2 + 3 = 4^2 + 3 = 19.$$

$$\text{Or } (2+1)^2 = 3^2 = 9$$

$$u_2 \neq (2+1)^2.$$

L'affirmation est donc fausse.

car il existe au moins un entier tel que $u_m \neq (m+1)^2$.

Δ: Ne PAS ÉCRIRE $u_2 = 9$, car alors u_2 a 2 valeurs distinctes ce qui est impossible.

$$2) \begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{m+1} = u_m + 2v_m \end{cases}; v_0 = 1 \quad v_{m+1} = 2u_m + v_m.$$

$$u_1 = 2 + 2 \times 1 = 4$$

$$u_2 = 4 + 2 \times 5 = 14$$

$$v_1 = 2 \times 2 + 1 = 5.$$

$$v_2 = 2 \times 4 + 5 = 13.$$

(0,5)

(0,5)

$$\frac{v_1}{v_0} = \frac{5}{1} = 5$$

$$\text{et } \frac{v_2}{v_1} = \frac{13}{5} = 2,6.$$

(0,5)

$\frac{v_2}{v_0} \neq \frac{v_2}{v_1}$ donc (v_m) n'est pas géométrique.

L'affirmation est fausse.

Exercice 3

$$\begin{cases} u_0 = 7 \\ u_{m+1} = 0,5u_m + m + 1,5 \end{cases}$$

$$1 a) \begin{aligned} u_1 &= 0,5 \times u_0 + 0 + 1,5 = 0,5 \times 7 + 1,5 = 5 \\ u_2 &= 0,5 \times u_1 + 1 + 1,5 = 0,5 \times 5 + 2,5 = 5 \end{aligned}$$

$$b) u_{15} \approx \underline{29}.$$

c) def terme(m):

$$u = 7$$

for i in range(0, m): ou (m).

$$u = 0,5 \times u + i + 1,5$$

return(u)

2. Je pose $\mathcal{P}_m: "u_m = 8 \times (0,5)^m + 2m - 1"$ ($m \in \mathbb{N}$).

Initialisation D'une part, $u_0 = 7$ D'autre part, $8 \times (0,5)^0 + 2 \times 0 - 1 = 8 + 0 - 1 = 7.$

1,5 } Donc $u_0 = 8 \times (0,5)^0 + 2 \times 0 - 1$. $\mathcal{P}_0$ est vraie.

Hérédité: Je suppose $\mathcal{P}_m$ vraie à un rang m fixé ($m \in \mathbb{N}$).

$$\begin{aligned} u_{m+1} &= 0,5 u_m + m + 1,5 \text{ d'après l'énoncé} \\ &= 0,5 (8 \times 0,5^m + 2m - 1) + m + 1,5 \text{ d'après} \\ &= 8 \times 0,5^{m+1} + m - 0,5 + m + 1,5 \text{ l'hyp de récurrence} \\ &= 8 \times 0,5^{m+1} + 2m + 1 \\ &= 8 \times 0,5^{m+1} + 2(m+1) - 1. \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{P}_{m+1}$ est vraie. $\mathcal{P}_m \Rightarrow \mathcal{P}_{m+1}$.

Conclusion D'après le principe de récurrence, $\forall m \in \mathbb{N}, u_m = 8 \times (0,5)^m + 2m - 1$.

(suite correction DS1)

Ex 3 3. a) $\sum_{k=0}^n 0,5^k = \boxed{\frac{1-0,5^{n+1}}{1-0,5}} = \frac{1-0,5^{n+1}}{0,5} = 2(1-0,5^{n+1})$ (suite géométrique de raison 0,5 et de 1^{er} terme 1)

b) $\sum_{k=0}^n (2k-1) = (n+1) \times \frac{-1 + (2n-1)}{2} = (n+1) \times \frac{2n-2}{2} = (n+1)(n-1) = \underline{n^2 - 1}$ car $a_0 = -1$ et $a_n = 2n-1$.

③ c) $S_n = \sum_{k=0}^n (8 \times 0,5^k) + (2k-1)$
 $= 8 \times \sum_{k=0}^n 0,5^k + \sum_{k=0}^n (2k-1)$
 $= 8 \times 2(1-0,5^{n+1}) + n^2 - 1$
 $= 16 - 16 \times 0,5^{n+1} + n^2 - 1$
 $= \underline{-8 \times 0,5^{n+1} + n^2 + 15}$ car $0,5^{n+1} = 0,5 \times 0,5^n$.

Ex 4 $(a_n): \begin{cases} a_0 = 0 \\ a_{n+1} = \frac{1}{2-a_n} \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}$

1 a) Je pose $P_n: "0 < a_n < 1"$. ($n \in \mathbb{N}^*$)

Initialisation: $a_1 = \frac{1}{2-a_0} = \frac{1}{2}$ donc $0 < a_1 < 1$
 $\underline{P_1 \text{ est vraie.}}$

Hérédité Je suppose que P_n est vraie à un rang fini ($n \in \mathbb{N}^*$)

Ainsi, $0 < a_n < 1$ d'après (H.R._n)
 donc $0 > -a_n > -1$ car $-1 < 0$

donc $2 > 2-a_n > 1$
 donc $\frac{1}{2} < \frac{1}{2-a_n} < 1$ car $x \mapsto \frac{1}{x}$ est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$

donc $0 < a_{n+1} < 1$ car $0 < \frac{1}{2}$.

donc P_{n+1} est vraie. Ainsi $\underline{P_n \Rightarrow P_{n+1}}$

Conclusion: D'après le principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 < a_n < 1$

b) $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2-a_n} - a_n = \frac{1 - a_n(2-a_n)}{2-a_n}$
 $= \frac{1 - 2a_n + a_n^2}{2-a_n} = \frac{(1-a_n)^2}{2-a_n}$

c) $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 < a_n < 1$ donc $0 < 2-a_n < 2$ donc $2-a_n > 0$

et donc $a_n - 1 < 0$ donc, par suite de croissance de la fonction

$x \mapsto x^2$ sur $]-\infty, 0[$, on a $(a_n - 1)^2 > 0$
 Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_{n+1} - a_n > 0$ (et $a_n > a_0$)
 Donc (a_n) est strictement croissante.

Δ: la stricte est à justifier $\Rightarrow$ si $a_n = 1$ parfait = justifiée sans énoncé de la stricte et si $a_n < 1$ stricte est du moins non justifiée.

2a) $\forall m \in \mathbb{N}, \underbrace{b_{m+1} - b_m}_{\text{pour l'idée } 0,5} = \frac{1}{a_{m+1}-1} - \frac{1}{a_m-1}$

$$= \frac{1}{\frac{1}{2-a_m} - 1} - \frac{1}{a_m-1}$$

$$= \frac{1}{\frac{1-2+a_m}{2-a_m}} - \frac{1}{a_m-1} \quad (0,5)$$

$$= \frac{2-a_m}{a_m-1} - \frac{1}{a_m-1} \quad (0,5)$$

$$= \frac{2-a_m-1}{a_m-1}$$

$$= \frac{1-a_m}{-(1-a_m)} \quad (0,5)$$

$$= -1.$$

Donc (b_m) est géométrique de raison -1 .

b) Donc $\forall m \in \mathbb{N}, b_m = b_0 + m \times (-1)$

Or $b_0 = \frac{1}{a_0-1} = \frac{1}{0-1} = -1 \quad 0,5$

Donc $b_m = -1 - m$ 0,5

Par ailleurs, $\forall m \in \mathbb{N}, b_m = \frac{1}{a_m-1}$

donc $a_m - 1 = \frac{1}{b_m}$

donc $a_m = \frac{1}{b_m} + 1 \quad 0,5$

donc $a_m = \frac{1}{-1-m} + 1$

$= \frac{1-1-m}{-1-m}$

$= \frac{-m}{-1-m}$

Donc, $\forall m \in \mathbb{N}, a_m = \frac{m}{m+1}$ 0,5