

Nom :

CONTRÔLE N°1

durée : 2 heures - Calculatrice autorisée en mode examen

Barème donné à titre indicatif sur 40

Exercice 1 (12,5 pts : 1,5 + 7 + 4)

Dans un parc régional, on étudie une espèce de renards. Cette population était de 1240 renards à au début de l'année 2017. On estime à 15% par an la baisse du nombre de renards. Afin de préserver l'espèce, on décide d'introduire à chaque année 30 renards à la fin de chaque année.

On note u_n le nombre de renards présents dans le parc au début de l'année 2017 + n .

1. (a) Expliquez pourquoi (u_n) peut se définir ainsi :
$$\begin{cases} u_0 = 1240 \\ u_{n+1} = 0,85u_n + 30 \end{cases} \text{ pour tout entier } n$$

(b) Calculer le nombre de renards présents dans le parc au début de l'année 2018.
2. (a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier n , $200 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 1240$.
(b) Que peut-on en déduire quant aux variations de la suite (u_n) ? Quelle est la signification de ce résultat dans le contexte de cet exercice?
(c) Marie affirme qu'un jour, il y aura moins de 100 renards dans le parc. Que pensez-vous de cette affirmation?
3. On pose, pour tout entier naturel n , $v_n = u_n - 200$.
(a) Démontrer que (v_n) est géométrique. Précisez sa raison.
(b) En déduire, pour tout entier naturel n , l'expression de v_n en fonction de n , puis l'expression de u_n en fonction de n .
(c) En déduire, selon ce modèle, le nombre de renards qui seront présents dans le parc en 2030.

Exercice 2 (4 points)

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses? Justifier.

1. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = u_n^2 + 3$$

Proposition 1 : Pour tout entier naturel n , $u_n = (n+1)^2$

2. On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par :

$$u_0 = 2, v_0 = 1 \text{ et, pour tout entier naturel } n : \begin{cases} u_{n+1} = u_n + 2v_n \\ v_{n+1} = 2u_n + v_n \end{cases}$$

Proposition 2 : La suite (v_n) est géométrique.

Exercice 3 (11 pts : 3 + 5 + 3)

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 7$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = 0,5u_n + n + 1,5.$$

1. (a) Calculer u_1 et u_2 en détaillant.
(b) En utilisant le mode « suite » de votre calculatrice, donner u_{15} (arrondi à l'entier près).
(c) La fonction terme() ci-dessous, écrite en langage Python, prend en paramètre un entier naturel n et retourne la valeur du terme de rang n de la suite (u_n) . Complétez sur le sujet le programme ci-dessous.

```
def terme(n) :  
  
    u = .....  
  
    for i in range (.....) :  
  
        u = .....  
  
    return (u)
```

2. Montrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence que, pour tout entier naturel n ,

$$u_n = 8 \times (0,5)^n + 2n - 1$$

3. On pose $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n = \sum_{i=0}^n u_i$.

- (a) Donner, en fonction de n , la valeur de $0,5^0 + 0,5^1 + 0,5^2 + \dots + 0,5^n = \sum_{k=0}^n 0,5^k$.
(b) On pose, pour tout entier naturel n , $c_n = 2n - 1$. On admet que (c_n) est une suite arithmétique de raison 2 et de premier terme $u_0 = -1$.
Donner, en fonction de n , la valeur de $c_0 + c_1 + \dots + c_n = \sum_{k=0}^n c_k$.
(c) En déduire que $S_n = -8 \times (0,5)^n + n^2 + 15$

Exercice 4 (12,5 points : 8,5 + 4)

Soit (a_n) la suite définie pour tout entier naturel n par
$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_{n+1} = \frac{1}{2 - a_n} \end{cases}$$

1. (a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul, $0 < a_n < 1$.
(b) Démontrer que, pour tout entier naturel n , $a_{n+1} - a_n = \frac{(a_n - 1)^2}{2 - a_n}$
(c) En déduire le sens de variation de la suite (a_n) .
2. On considère la suite (b_n) définie, pour tout naturel n , par $b_n = \frac{1}{a_n - 1}$.
(a) Démontrer que (b_n) est arithmétique de raison -1 .
(b) En déduire l'expression de b_n puis celle de a_n en fonction de n .