

Correction — Épreuve anticipée de mathématiques

Automatisme

- | | | | |
|------------------|------------------------------------|--------------------|-------------------------------|
| 1) c) 5 | 2) b) $x^2 + 6x + 9$ | 3) c) 44 % | 4) d) $S = \{-3; 3\}$ |
| 5) a) 2 | 6) d) 0,69 | 7) d) 64 | 8) b) $(x - 2)(x + 2)$ |
| 9) a) 0,5 | 10) d) décrois. puis crois. | 11) b) 0,23 | 12) b) $u_n = 5 + 3n$ |

1) $\frac{1}{0,2} = \frac{1}{\frac{1}{5}} = 5$

2) $(x + 3)^2 = x^2 + 2 \times 3 \times x + 3^2 = x^2 + 6x + 9$

3) $1,2 \times 1,2 = 1,44$ soit une augmentation de 44 %

4) $x^2 = 9 \Leftrightarrow x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow (x - 3)(x + 3) = 0 \Leftrightarrow x = 3 \text{ ou } x = -3$

5) $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{8 - 2}{4 - 1} = \frac{6}{3} = 2$

6) $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0,31 = 0,69$

7) $2^6 = 64$

8) $x^2 - 4 = x^2 - 2^2 = (x - 2)(x + 2)$ (identité remarquable $a^2 - b^2$)

9) $10x - 5 = 0 \Rightarrow 10x = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{10} = 0,5$

10) $f'(x) = 2x : f'(x) < 0$ sur $(-\infty; 0)$ et $f'(x) > 0$ sur $(0; +\infty) \rightarrow$ décroissante puis croissante

11) $P(\bar{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = 0,65 - 0,42 = 0,23$

12) La suite est arithmétique de raison $r = 3$ et de premier terme $u_0 = 5$, donc $u_n = u_0 + n \times r = 5 + 3n$

Exercice 1

$A(4; 0), B(4; 3), C(0; 3)$

1) Nature du triangle ABC

$AB = \sqrt{(4 - 4)^2 + (3 - 0)^2} = \sqrt{9} = 3$

$BC = \sqrt{(0 - 4)^2 + (3 - 3)^2} = \sqrt{16} = 4$

$AC = \sqrt{(0 - 4)^2 + (3 - 0)^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$

$AB^2 + BC^2 = 9 + 16 = 25 = AC^2$: le théorème de Pythagore est vérifié.

Le triangle ABC est rectangle en B.

$$2) a) \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \times (-4) + 3 \times 3 = 9$$

$$b) \cos(\widehat{BAC}) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{AB \times AC} = \frac{9}{3 \times 5}$$

$$\cos(\widehat{BAC}) = \frac{3}{5}$$

3) Dans un triangle, $AH = AB \cos(\widehat{BAC})$ (projection de B sur (AC)) :

$$AH = AB \times \cos(\widehat{BAC}) = 3 \times \frac{3}{5} = \frac{9}{5} = 1,8$$

4) On substitue $C(0; 3)$ dans l'équation :

$$0^2 + 3^2 + 2(0) - 2(3) - 2 = 0 + 9 + 0 - 6 - 2 = 1 \neq 0$$

Le point C n'appartient pas à $\mathcal{F}$.

Exercice 2

$$f(x) = -0,1x^2 + 0,6x - 0,5$$

Partie A

1)

$$f(7) = -0,1 \times 49 + 0,6 \times 7 - 0,5 = -4,9 + 4,2 - 0,5 = -1,2$$

$$f(2,5) = -0,1 \times 6,25 + 0,6 \times 2,5 - 0,5 = -0,625 + 1,5 - 0,5 = 0,375$$

2) **Signe de f sur $\mathbb{R}$**

$$\text{Racines : } f(x) = 0 \Leftrightarrow -0,1x^2 + 0,6x - 0,5 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 5 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x - 5) = 0$$

$$\text{Donc } x_1 = 1 \text{ et } x_2 = 5.$$

Le coefficient de x^2 est $-0,1 < 0$: la parabole est tournée vers le bas.

$$f(x) > 0 \text{ sur }]1; 5[, \quad f(x) < 0 \text{ sur } (-\infty; 1) \cup (5; +\infty), \quad f(1) = f(5) = 0.$$

3) **Extremum**

$$\text{Sommet : } x_S = -\frac{b}{2a} = -\frac{0,6}{2 \times (-0,1)} = \frac{0,6}{0,2} = 3$$

$$f(3) = -0,1 \times 9 + 0,6 \times 3 - 0,5 = -0,9 + 1,8 - 0,5 = 0,4$$

f admet un maximum de 0,4, atteint en $x = 3$.

4) **Résoudre $f(x) < 0,3$**

$$-0,1x^2 + 0,6x - 0,5 < 0,3$$

$$-0,1x^2 + 0,6x - 0,8 < 0 \quad (\times -10) \Rightarrow x^2 - 6x + 8 > 0$$

$$(x - 2)(x - 4) > 0$$

$$S = (-\infty ; 2) \cup (4 ; +\infty)$$

Partie B

1) D'après la question A.2), $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in [1 ; 5]$ (les racines sont 1 et 5, f positive entre elles).

D'après A.3), le maximum de f sur $[1 ; 5]$ est $f(3) = 0,4 \leq 1$.

Donc $0 \leq f(x) \leq 1$ pour tout $x \in [1 ; 5]$. $f(x)$ peut bien représenter une probabilité.

2) 300 composants = 3 centaines, donc $x = 3$.

$$P(\text{défectueuse}) = f(3) = 0,4$$

3) On pose $p = 0,4$. Les deux tirages sont indépendants (remise).

a)

$$P(\text{deux défectueuses}) = p \times p = 0,4 \times 0,4$$

$$= 0,16$$

b)

Exactement une défectueuse : (D, ND) ou (ND, D)

$$P = p(1 - p) + (1 - p)p = 2 \times 0,4 \times 0,6$$

$$= 0,48$$