

Interrogation n°6 de SPC

Calculatrices autorisées

Exercice 1 : Mouvement du télescope James-Webb dans un champ de gravitation

Le télescope spatial James-Webb, lancé par Ariane 5 le 25 décembre 2021, stationne au point de Lagrange L_2 pour effectuer sa mission d'observation de l'espace lointain.

L_2 est situé à environ 1,5 million de km de la Terre, soit à 1 % seulement de la distance Soleil-Terre. C'est un bon emplacement pour un observatoire de l'espace lointain comme l'est James-Webb.

L_2 est l'un des cinq points remarquables du système Soleil-Terre. Tout objet de faible masse qui s'y trouve garde sa position relative par rapport à la Terre et au Soleil en dehors de toute perturbation. Cet alignement assure au télescope de demeurer dans l'ombre portée de la Terre et donc à l'abri du rayonnement thermique du Soleil.

Données :

Constante de gravitation universelle : $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ N}\cdot\text{m}^2\cdot\text{kg}^{-2}$

Masse du Soleil : $M_S = 1,99 \times 10^{30} \text{ kg}$

Masse de la Terre : $M_T = 5,97 \times 10^{24} \text{ kg}$

Masse de James-Webb : $m = 6,0 \times 10^3 \text{ kg}$

Distance moyenne Soleil James-Webb : $D = 1,51 \times 10^{11} \text{ m}$

Distance moyenne Terre James-Webb : $d = 1,50 \times 10^9 \text{ m}$

Durée d'une année terrestre : 365,24 jours

On étudie le système {télescope James-Webb}, représenté par le point J, dans le référentiel héliocentrique supposé galiléen. Il subit simultanément l'interaction gravitationnelle du Soleil et celle de la Terre. Son mouvement est considéré ici comme circulaire, comme l'est celui de la Terre.

1. Positionner, sans souci d'échelle, sur le schéma de l'annexe, la base de Frenet au point L_2 ainsi que les forces gravitationnelles exercées par le Soleil S sur J, $\vec{F}_{S/J}$, et par la Terre T sur J, $\vec{F}_{T/J}$.
2. À partir de la deuxième loi de Newton, montrer que dans l'approximation d'un mouvement circulaire, le mouvement de J est uniforme.
3. Montrer que l'expression de la valeur de la vitesse v de J dans le référentiel héliocentrique est :

$$v = \sqrt{D \times G \times \left(\frac{M_T}{d^2} + \frac{M_S}{D^2} \right)}.$$

La valeur v de la vitesse du télescope est d'environ $30 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1}$ (proche de celle de la Terre).

4. Établir l'expression de la période de révolution T du télescope spatial James-Webb en fonction de D et v .
5. Calculer la période de révolution T du télescope, exprimée en jours. Conclure en commentant « l'alignement » du télescope.

Exercice 2 : Mars vue par l'œil de Kepler

On étudie dans cet exercice la troisième loi de Kepler appliquée à la planète Mars.

Donnée : valeur de l'unité astronomique (au, *astronomical unit*) : $1 \text{ au} = 1,496 \times 10^{11} \text{ m}$.

En 1600, Kepler devient l'assistant de l'astronome danois Tycho Brahe. Celui-ci le charge d'étudier la trajectoire de Mars et de déterminer son orbite à l'aide des observations astronomiques et des mesures qu'il a lui-même effectuées. Cette tâche, longue et délicate, conduit Kepler à envisager une trajectoire elliptique pour Mars. Il publie ses deux premières lois en 1609, puis la troisième loi en 1618.

D'après La science moderne : de 1450 à 1800, de René Taton

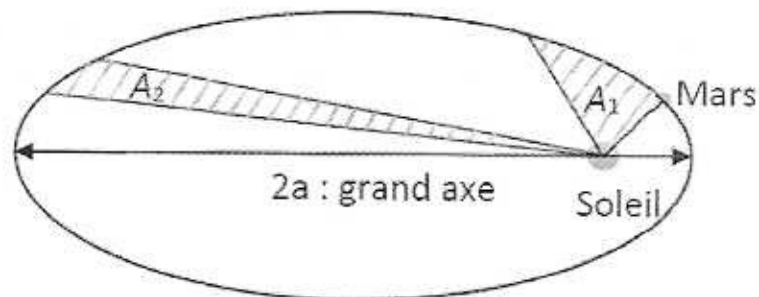


Figure 1. Trajectoire elliptique de Mars dans le référentiel héliocentrique (échelle non respectée).
Les aires A_1 et A_2 sont balayées pendant des durées égales.

Le référentiel d'étude est le référentiel héliocentrique supposé galiléen : son origine est au centre du Soleil et ses axes pointent vers des étoiles lointaines.

Q1. Énoncer les deux premières lois de Kepler. En déduire que le mouvement de Mars dans le référentiel héliocentrique n'est pas uniforme.

Les périodes de révolution T (en année) et les demi-grands axes a (en unité astronomique) des trajectoires des planètes du système solaire (à l'exception de Mars) sont saisies dans un programme écrit en langage Python, afin de vérifier la troisième loi de Kepler. Un extrait de ce programme est donné sur la figure 2.

```
1 # Importation des bibliothèques utilisées
2 import numpy as np
3 import matplotlib.pyplot as plt
4 from scipy.optimize import curve_fit
5
6 # Définition des constantes : 1 unité astronomique, notée au (en m) et 1 année, notée an (en
7 secondes)
8 au = 1.496*10**11
9 an = 31.55*10**6
10
11 # Création des tableaux de données d'affichage
12 a = np.array([0.38,0.72,1.5,2.0,9.54,19.2,30.1]) # a : demi-grand axe, exprimé en au
13 T = np.array([0.241,0.615,1.1,11.86,29.46,84.02,165]) # T : période de révolution, exprimée en années
14 am = a*au
15 Ts = T*an
16
17 acube = am**3 # 
18 Tcarre = Ts**2 # 
```

Figure 2. Extrait de programme en langage Python ayant pour but de vérifier la troisième loi de Kepler

Le programme permet d'obtenir une représentation graphique dont un zoom est proposé en figure 3.

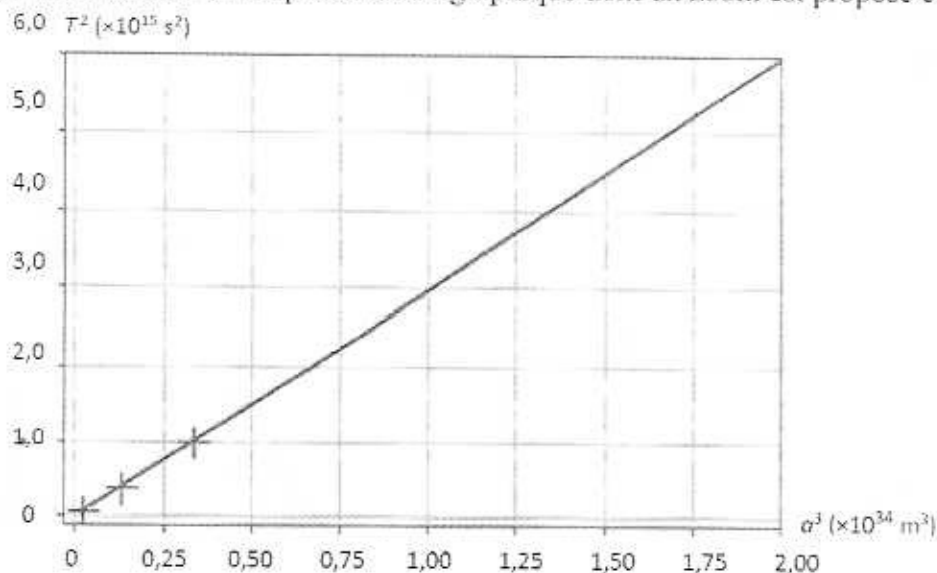


Figure 3. Modélisation graphique de la 3ème loi de Kepler

Dans le tableau 1 sont regroupés les périodes de révolution (en s) et les demi-grands axes (en m) des trajectoires des planètes du système solaire (à l'exception de Mars).

	Mercure	Vénus	Terre	Jupiter	Saturne	Uranus	Neptune
T (en s)	$7,6 \times 10^6$	$1,9 \times 10^7$	$3,2 \times 10^7$	$3,7 \times 10^8$	$9,3 \times 10^8$	$2,6 \times 10^9$	$5,2 \times 10^9$
a (en m)	$5,7 \times 10^{10}$	$1,1 \times 10^{11}$	$1,5 \times 10^{11}$	$7,8 \times 10^{11}$	$1,4 \times 10^{12}$	$2,9 \times 10^{12}$	$4,5 \times 10^{12}$

Tableau 1. Périodes de révolution et demi-grands axes des trajectoires des planètes (d'après <https://cnes.fr>)

Q2. Recopier sur la copie la ligne 9 du programme et la compléter.

Q3. Proposer sur la copie un commentaire en précisant la finalité des lignes 15 et 16 du programme et les unités des grandeurs calculées.

Q4. Commenter la figure 3 au regard des lois de Kepler.

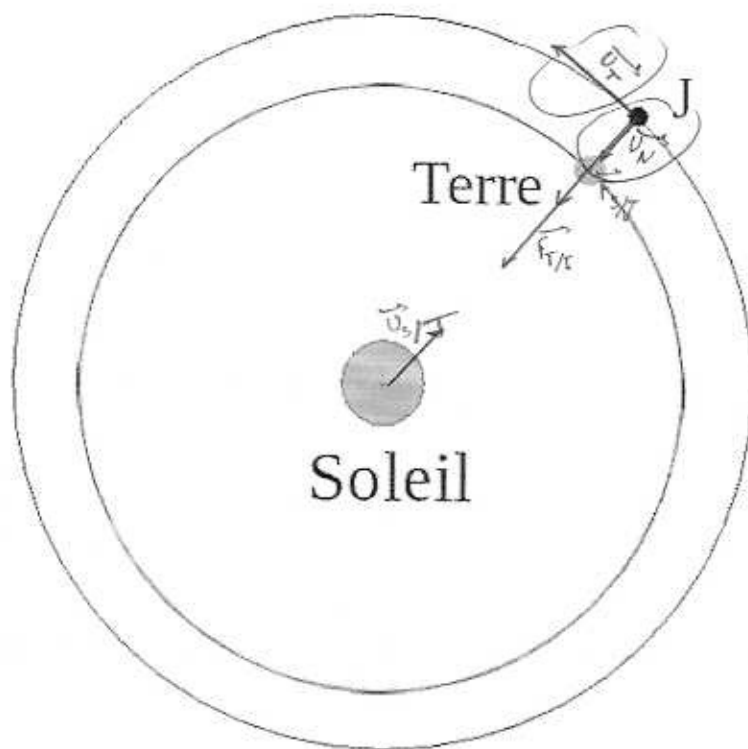
À partir des relevés de Tycho Brahe, Kepler a pu déterminer que la période de révolution de Mars, notée T_{Mars} , était de 687 jours.

Q5. Calculer, en exploitant la figure 3 reproduite sur l'annexe, la valeur du demi-grand axe de l'orbite de Mars, noté a_{Mars} , et justifier qu'elle correspond à la quatrième planète du système solaire en partant du Soleil.

Annexe

Exercice 1

Schéma de l'orbite de la Terre et de J (en L_2) autour du Soleil (l'échelle n'est pas respectée).



$\vec{v}_J$ et $\vec{v}_T$
ont même norme!

1,5

Exercice 2 : reproduction de la fig 3

