

TERMINALES
1 - 2 - 4 - 6 - 7 - 8 - 9 - 10
SPÉCIALITÉ MATHÉMATIQUES

durée : 3h

calculatrices autorisées

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

EXERCICE N°1 :**(5 points)**

Déterminer, en justifiant, les limites demandées des fonctions suivantes et préciser si l'on peut en déduire l'existence d'asymptotes en donnant leur type et leur équation le cas échéant.

1) $\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x < 3}} f(x)$ pour $f(x) = e^{\frac{x^2+1}{3-x}}$;

2) $\lim_{x \rightarrow 2} g(x)$ pour $g(x) = \frac{-x^2 + x + 2}{x^2 + x - 6}$;

3) $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x)$ pour $h(x) = x + \sqrt{x^2 + 1}$;

4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} k(x)$ pour $k(x) = \frac{2x + 3}{\cos(x^2 - 7x + 2) - 2}$.

EXERCICE N°2 :**(6 points)**

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $] -4 ; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{2 + 3x}{4 + x}$.

Partie A

- Étudier les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.
Préciser la (ou les) asymptote(s) éventuelle(s) de sa courbe représentative $\mathcal{C}_f$.
- Montrer que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $] -4 ; +\infty[$.

Partie B

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 3$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = f(u_n)$.
On admet que cette suite est bien définie.

- Montrer que pour tout entier naturel n , $1 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 3$.
- Montrer que la suite (u_n) est convergente.

Partie C

On considère la suite (v_n) définie par : $v_0 = 0,1$ et pour tout entier naturel n , $v_{n+1} = f(v_n)$.

- Montrer que pour tout entier naturel n , $1 - v_{n+1} = \left(\frac{2}{4 + v_n} \right) (1 - v_n)$.
 - Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $0 \leq 1 - v_n \leq \left(\frac{1}{2} \right)^n$.
- La suite (v_n) converge-t-elle ? Si oui, préciser sa limite.

EXERCICE N°3 :

(5,5 points)

Dans la revue *Lancet Public Health*, les chercheurs affirment qu'au 11 mai 2020, 5,7% des adultes français avaient déjà été infectés par la COVID 19.

Source : [https://www.thelancet.com/journals/lanpub/article/PIIS2468-2667\(21\)00064-5/fulltext](https://www.thelancet.com/journals/lanpub/article/PIIS2468-2667(21)00064-5/fulltext)

On se servira de cette donnée pour les parties A et B de cet exercice.

Partie A

1. On prélève un individu dans la population française adulte au 11 mai 2020.
On note I l'évènement : « l'adulte a déjà été infecté par la COVID 19 »
Quelle est la probabilité que cet individu prélevé ait déjà été infecté par la COVID 19 ?
2. On prélève un échantillon de 100 personnes de la population supposées choisies de façon indépendante les unes des autres.
On assimile ce prélèvement à un tirage avec remise.
On appelle X la variable aléatoire qui compte le nombre de personnes ayant déjà été infectées.
 - a. Justifiez que X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.
 - b. Calculer son espérance mathématique. Interpréter ce résultat dans le cadre de l'exercice.
 - c. Quelle est la probabilité qu'il n'y ait aucune personne infectée dans l'échantillon ?
On donnera une valeur approchée à 10^{-4} près du résultat.
 - d. Quelle est la probabilité qu'il y ait au moins 2 personnes infectées dans l'échantillon ?
On donnera une valeur approchée à 10^{-4} près du résultat.
 - e. Déterminer le plus petit entier n tel que $P(X \leq n) > 0,9$.
Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Partie B :

Un test a été mis en place : celui-ci permet de déterminer (même longtemps après l'infection), si une personne a ou non déjà été infectée par la COVID 19.

Si le test est positif, cela signifie que la personne a déjà été infectée par la COVID 19.

Deux paramètres permettent de caractériser ce test : sa sensibilité et sa spécificité.

La **sensibilité** d'un test est la probabilité qu'il soit positif sachant que la personne a été infectée par la maladie. (II s'agit donc d'un vrai positif).

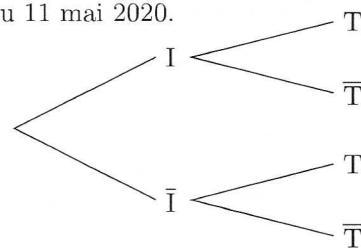
La **spécificité** d'un test est la probabilité que le test soit négatif sachant que la personne n'a pas été infectée par la maladie. (II s'agit donc d'un vrai négatif).

Le fabricant du test fournit les caractéristiques suivantes : sa sensibilité est de 0,8 et sa spécificité est de 0,99.

On prélève un individu soumis au test dans la population française adulte au 11 mai 2020.

On note T l'évènement « le test réalisé est positif ».

1. Reproduire et compléter l'arbre des probabilités ci-contre avec les données de l'énoncé :
2. Montrer que $p(T) = 0,05503$.
3. Quelle est la probabilité qu'un individu ait été infecté sachant que son test est positif ?
On donnera une valeur approchée à 10^{-4} près du résultat.



Partie C :

On considère un groupe d'une population d'un autre pays soumis au même test de sensibilité 0,8 et de spécificité 0,99. Dans ce groupe la proportion d'individus ayant un test positif est de 29,44%.

On choisit au hasard un individu de ce groupe ; quelle est la probabilité qu'il ait été infecté ?

EXERCICE N°4 :**(3,5 points)**

Pour chacune des trois affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse, en justifiant la réponse.

Il est attribué un point par réponse correctement justifiée. Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte, une absence de réponse n'est pas pénalisée.

1. On considère la suite (p_n) définie pour tout entier naturel n , par : $p_n = n^2 - 42n + 4$.

Affirmation 1 : La suite (p_n) est strictement décroissante.

2. Soit a un nombre réel. On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par :

- $u_0 = a$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \frac{1}{3}\sqrt{u_n^2 + 8}$;
- $v_n = u_n^2 - 1$ pour tout entier naturel n .

Affirmation 2 : La suite (v_n) est une suite géométrique.

3. On considère une suite (w_n) qui vérifie, pour tout entier naturel n ,

$$n^2 \leq (n+1)^2 w_n \leq n^2 + n.$$

Affirmation 3 : La suite (w_n) converge.