

Devoir de Mathématiques

Terminale spécialité

Durée: 2h

Exercice 1

Dans un restaurant figurent au menu :

- 12 entrées : 3 avec viande, 3 avec poisson et 6 végétariennes
- 20 plats : 10 avec viande, 6 avec poisson et 4 végétariens

1. Combien de menus Entrée Plat est-il possible de composer ?
2. Combien de menus sans poisson est-il possible de composer ?

Un client commande au hasard de manière uniforme et indépendante une entrée et un plat.

3. Quelle est la probabilité que le menu de ce client soit végétarien ?
4. Quelle est la probabilité que l'entrée et le plat soient de natures différentes (par exemple une entrée avec viande et un plat végétarien) ?

En outre, le restaurant propose en dessert des coupes de glaces de différents parfums. 10 parfums différents figurent à la carte.

5. Un client désire une coupe avec deux boules de glace. Ces boules de glace peuvent être toutes les deux du même parfum. Montrer que ce client a 55 choix possibles
6. Combien de possibilités aurait ce client s'il choisissait une coupe avec 3 boules de glace ?

Exercice 2

Déterminer les limites suivantes :

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 - n^4)(n^3 + 1)$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n^3 - 1}{n - 2n^3} \right)$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2022}{n} \right)^n$

Exercice 3

Une commune met en location des vélos dans toute la ville. Les responsables de la commune estiment qu'à la fin de chaque mois, 10 % des vélos ne sont plus utilisables. 100 nouveaux vélos sont alors achetés chaque mois pour pallier ces pertes et satisfaire la demande croissante de la ville.

Pour tout entier naturel n , on note u_n le nombre de vélos mis en location par la ville n mois après le 1^{er} janvier 2024.

1. Justifier que pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 0,9u_n + 100$.

Partie A

Dans cette partie seulement, on considère que $u_0 = 600$.

2. Déterminer le nombre de vélos disponibles le 1^{er} février 2024.
3. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $u_n \leq 1000$.
4. Montrer que la suite (u_n) est croissante.
5. En déduire que la suite (u_n) converge. La limite et son interprétation seront demandées dans la partie B.
6. On souhaite déterminer à partir de quel mois la ville disposera de 980 vélos. Compléter le programme suivant, écrit en Python, pour qu'il renvoie le plus petit entier naturel n tel que $u_n \geq 980$.

```
1 def seuil():
2     N = 0
3     U = 600
4     while ...
5         N = ...
6         U = ...
7     return ...
```

Partie B

Dans cette partie, on considère un réel positif a et on note $u_0 = a$. On définit alors la suite (v_n) par $v_n = u_n - 1000$ pour tout entier naturel n .

7. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $0,9$. On précisera son premier terme.
8. Exprimer v_n en fonction de n pour tout entier naturel n . En déduire que pour tout entier naturel n ,
$$u_n = 1000 + (a - 1000) \times 0,9^n.$$
9. Déterminer la limite de la suite (u_n) . Cette limite dépend-elle de la valeur de a ?
10. Déterminer, selon les valeurs de a , le sens de variations de la suite (u_n) .
11. Interpréter les résultats de ces deux dernières questions selon le contexte de l'exercice.

Indications

- A3. Posez proprement les étapes de votre démonstration par récurrence : commencez par écrire distinctement quelle est la propriété $P(n)$ que vous souhaitez démontrer, puis déroulez les trois étapes de la démonstration par récurrence : initialisation, hérédité et conclusion.
- A4. On rappelle qu'une suite est croissante si, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} - u_n \geq 0$.
- B7. Une suite (v_n) est géométrique s'il existe un réel q tel que pour tout entier naturel n , $v_{n+1} = qv_n$. Le réel q est appelé « raison » de la suite. Commencer par exprimer v_{n+1} en fonction de u_{n+1} à l'aide des données de l'énoncé.