

Exercices sur le comportement asymptotique d'une fonction

1 Calculs de limites à l'infinie

Exercice 1

Calculer les limites des fonctions suivantes lorsque x tend vers a , en justifiant votre réponse :

1. $f(x) = x^3(1 - \frac{1}{x})$ en $a = +\infty$.
2. $f(x) = 2x - \frac{1}{x^2} + 3$ en $a = -\infty$.
3. $f(x) = 3\sqrt{x} + x^2$ en $a = +\infty$.
4. $f(x) = \frac{x^3 + x}{2x^3 + 5x^2 - 3}$ en $a = +\infty$.
5. $f(x) = x^4 - 2x^3 + 5x + 4$ en $a = -\infty$ et en $a = +\infty$.

Parmi les fonctions précédentes, et à partir des limites que vous venez de calculer, quelles sont celles qui admettent une asymptote horizontale ? Lorsque c'est le cas, préciser l'équation de l'asymptote, et si il s'agit d'une asymptote en $-\infty$ ou $+\infty$.

2 Calculs de limites en un réel

Exercice 2

Calculer les limites des fonctions suivantes lorsque x tend vers a , en justifiant votre réponse :

1. $f(x) = x\sqrt{x}$ en $a = 0$.
2. $f(x) = -\frac{6}{x^2}$ en $a = 0$.
3. $f(x) = \frac{3}{x-2} + 2x + 5$ en $a = 2$.
4. $f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{2x^2 + 3x - 2}$ en $a = -2$ (cf ex 39 sur le livre).
5. $f(x) = \frac{3x^2 + x - 2}{x^2 + x - 2}$ en $a = 1$.

Parmi les fonctions précédentes, et à partir des limites que vous venez de calculer, quelles sont celles qui admettent une asymptote verticale ? Lorsque c'est le cas, préciser l'équation de l'asymptote.

3 Asymptotes obliques

Exercice 3

Soit f la fonction définie $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ par $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 2}{x - 3}$;

1. Montrer que $f(x) = x - 1 - \frac{1}{x - 3}$.
2. En déduire que la droite d'équation $y = x - 1$ est asymptote à la courbe de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

Exercice 4

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 + 9x + 2}{x^2 + 1}$;

1. Déterminer 3 réels a , b et c tels que $f(x) = ax + b + \frac{cx}{x^2 + 1}$.
2. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
3. Montrer que la droite d'équation $y = x + 2$ est une asymptote de la courbe représentative de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
4. Etudier la position relative de la courbe et de son asymptote oblique.

4 Problèmes

Exercice 5

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{2}{x^2 + 1}$.

1. Quel est le domaine de définition de f ?
2. Montrer que f est bornée par 0 et 2.
3. Calculer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.
4. Calculer la dérivée et étudier son signe.
5. Dresser le tableau de variations de f en y faisant apparaître les limites.

Exercice 6

On considère la fonction définie par $f(x) = \frac{2x^2 + 6x + 1}{x^2 - 1}$ et on appelle $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

1. Quel est l'ensemble de définition de f ?
2. Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
3. En déduire les asymptotes éventuelles de $\mathcal{C}_f$.
4. Calculer $f'(x)$.
5. Dresser le tableau de variations de f , en faisant apparaître les limites.
6. Donner l'équation de la tangente $\mathcal{T}_0$ à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0. Déterminer le(s) point(s) d'intersection entre $\mathcal{C}_f$ et cette tangente.
7. Tracer dans un même repère, la courbe, les asymptotes et $\mathcal{T}_0$.