

Correction

Sujet 1 : Polynésie – septembre 2002

1) f est définie sur $\mathbb{R}$ qui est symétrique par rapport à 0 et pour tout réel x :

$$f(-x) = \frac{e^{-2x} - 1}{e^{-2x} + 1} = \frac{e^{-2x}(1 - e^{2x})}{e^{-2x}(1 + e^{2x})} = -\frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = -f(x)$$

Donc la fonction f est impaire et sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'origine du repère.

2) Pour $x \in \mathbb{R}$:

$e^{2x} - 1 < e^{2x} + 1$ et comme $e^{2x} + 1$ est strictement positif, nous avons : $\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} < 1$ autrement dit $f(x) < 1$.

Par ailleurs, $f(x) + 1 = \frac{e^{2x}-1+e^{2x}+1}{e^{2x}+1} = \frac{2e^{2x}}{e^{2x}+1} > 0$ donc $f(x) > -1$.

Finalement, pour tout réel x , on a $\boxed{-1 < f(x) < 1}$

3)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x} = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-1}{x+1} = -1 \text{ donc par composition } \boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1}$$

Ceci indique que la courbe de f admet une tangente horizontale en $-\infty$ d'équation $y = -1$.

$$f(x) = \frac{e^{2x} \left(1 - \frac{1}{e^{2x}}\right)}{e^{2x} \left(1 + \frac{1}{e^{2x}}\right)} = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-2x} = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-x}{1+x} = 1 \text{ donc par composition } \boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1}$$

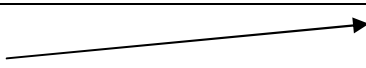
Ceci indique que la courbe de f admet une tangente horizontale en $+\infty$ d'équation $y = 1$.

4) f est de la forme $\frac{u}{v}$ avec $u: x \mapsto e^{2x} - 1$ dérivable sur $\mathbb{R}$ et $v: x \mapsto e^{2x} + 1$ dérivable sur $\mathbb{R}$ et qui ne s'annule pas donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2} = \frac{2e^{2x}(e^{2x} + 1) - 2e^{2x}(e^{2x} - 1)}{(e^{2x} + 1)^2} = \frac{4e^{2x}}{(e^{2x} + 1)^2} > 0$$

Donc la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

De plus $f(0) = 0$. On en déduit le tableau de variations et de signe de f .

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	+		+
Variations de f			
Signe de $f(x)$	-	0	+

5) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc continue sur $\mathbb{R}$. Grâce à l'étude précédente $f(\mathbb{R}) =]-1; 1[$ et comme f est strictement croissante, d'après le théorème de la bijection, tout élément de $]-1; 1[$ admet un unique antécédent par f . Donc pour tout $\alpha \in]-1; 1[$, l'équation $f(x) = \alpha$ a une unique solution dans $\mathbb{R}$.

Sujet 2 : Réunion – juin 2007

1.

a. Quand x tend vers $-\infty$, on peut supposer que $x < 0$:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x - 1 = -1 \end{array} \right\} \text{ donc, par quotient } \boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0}$$

b. Pour $x \neq 0 : x \left(1 + \frac{1}{e^{x-1}}\right) = \frac{x(e^{x-1}+1)}{e^{x-1}} = \frac{x e^x}{e^{x-1}} = f(x)$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x - 1 = +\infty \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{e^{x-1}} = 1 \end{array} \right\} \text{ donc, par multiplication, } \boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty}$$

2. D'après le cours, la limite de $\frac{e^x-1}{x}$ quand x tend vers 0 est égale à 1 (utilisation de la dérivabilité de la fonction exponentielle en 0) donc : $\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{e^x-1} = 1}$

Pour $x \neq 0$: $f(x) = \frac{x}{e^x - 1} \times e^x$:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{e^x - 1} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0} e^x = e^0 = 1 \end{array} \right\} \text{ donc, par multiplication, } \boxed{\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1 = f(0) \text{ donc } f \text{ est continue en } 0}$$

3.

a. On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = e^x - x - 1$.

Par somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $h'(x) = e^x - 1$.

$$h'(x) > 0 \Leftrightarrow e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow e^x > e^0 \Leftrightarrow x > 0$$

Donc h est décroissante sur $]-\infty; 0]$ et croissante sur $[0; +\infty[$. h admet donc un minimum en 0 qui est égal à $h(0) = e^0 - 0 - 1 = 0$. Donc, pour tout x réel, $h(x) \geq 0$ et $h(x) = 0$ n'a lieu que pour $x = 0$.

Donc, pour tout réel x , $e^x \geq x + 1$ et l'égalité a lieu uniquement pour $x = 0$.

b. f est de la forme $\frac{u}{v}$ avec $u: x \mapsto xe^x$ dérivable sur $\mathbb{R}$ et $u'(x) = e^x + xe^x$ et $v: x \mapsto e^x - 1$ dérivable sur $\mathbb{R}$ et s'annule en 0 donc f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et :

$$f'(x) = \frac{(e^x + xe^x)(e^x - 1) - xe^x \times e^x}{(e^x - 1)^2} = \frac{e^x(e^x - 1 - x)}{(e^x - 1)^2} = \frac{e^x g(x)}{(e^x - 1)^2} \text{ avec } g: x \mapsto e^x - 1 - x$$

c. Sur $\mathbb{R}^*$, $e^x > 0$, $(e^x - 1)^2 > 0$ donc f' est du signe de g . Or d'après la question précédente, $g(x) \geq 0$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	+		+
Variations de f	0	1	$+\infty$

4.

a. Pour $x \neq 0$:

$$f(-x) = \frac{-xe^{-x}}{e^{-x} - 1} = \frac{-xe^{-x} \times e^x}{(e^{-x} - 1) \times e^x} = \frac{-x}{1 - e^x} = \frac{x}{e^x - 1}$$

Coefficient directeur de (MM') :

$$\frac{y'_M - y_M}{x'_M - x_M} = \frac{f(-x) - f(x)}{-x - x} = \frac{\frac{x}{e^x - 1} - \frac{xe^x}{e^x - 1}}{-2x} = \frac{x - xe^x}{-2x(e^x - 1)} = \frac{1 - e^x}{2(1 - e^x)} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

b. On suppose que f est dérivable en 0, donc la courbe de f admet une tangente au point d'abscisse 0 de coefficient directeur $f'(0)$. Or la droite (MM') est une sécante à la courbe de f . Quand x tend vers 0, la sécante (MM') tend vers la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0. Les coefficients directeurs sont donc égaux.

Finalement, $\boxed{f'(0) = \frac{1}{2}}$

Sujet 3 : Amérique du Sud – novembre 2001

Partie A

1)

a. En $+\infty$: $f(x) = 2xe^{-2x} + e^{-2x}$: en posant $X = -2x$, on a $f(x) = -Xe^X + e^X$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} X = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} Xe^X = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^X = 0 \end{array} \right\} \text{ donc par somme et composition } \boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0}$$

On en déduit que l'axe des abscisses est une asymptote horizontale à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$.

b. En $-\infty$:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x + 1 = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} -2x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \end{array} \right\} \text{ par composition } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-2x} = +\infty \left. \vphantom{\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-2x} = +\infty} \right\} \text{ par produit } \boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty}$$

2) f est de la forme $u \times e^v$ avec $u: x \mapsto 2x + 1$ dérivable sur $\mathbb{R}$ et $v: x \mapsto -2x$ dérivable sur $\mathbb{R}$ donc f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$f'(x) = u'(x)e^{v(x)} + u(x) \times v'(x)e^{v(x)} = 2e^{-2x} + (2x+1) \times (-2)e^{-2x} = (2-4x-2)e^{-2x} = \boxed{-4xe^{-2x}}$$

L'exponentielle est strictement positive donc $f'(x)$ est du signe de $-4x$, autrement dit positif sur $\mathbb{R}^-$ et négatif sur $\mathbb{R}^+$.

3)

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	+	0	-
Variations de f			

4)

a. L'axe des abscisses a pour équation $y = 0$. Pour déterminer l'abscisse de A , on doit résoudre l'équation $f(x) = 0$.

Pour $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow (2x+1)e^{-2x} = 0 \Leftrightarrow 2x+1 = 0 \text{ car } e^{-2x} > 0$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$$

Le point A a donc pour coordonnées $\boxed{\left(-\frac{1}{2}; 0\right)}$

b. Sur $]-\infty; -\frac{1}{2}]$, f est strictement croissante et admet 0 comme maximum donc f est négative sur cet intervalle.

Sur $[-\frac{1}{2}; +\infty[$, f a pour maximum 1 et pour minimum 0 donc f est positive sur cet intervalle.

Partie B

1)

a. f' est le produit d'une fonction polynôme et de la composée de la fonction exponentielle et d'une fonction affine donc elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$f''(x) = -4e^{-2x} - 4x \times (-2)e^{-2x} = (-4 + 8x)e^{-2x} = \boxed{4(2x-1)e^{-2x}}$$

b. Pour $x \in \mathbb{R}$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 4(2x-1)e^{-2x} = 0 \Leftrightarrow 2x-1 = 0 \text{ car } e^{-2x} > 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \quad \text{donc} \quad S = \left\{\frac{1}{2}\right\}$$

2) L'équation de la tangente à la courbe de $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse $\frac{1}{2}$ est $y = f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right)$ or

$$f'\left(\frac{1}{2}\right) = -4 \times \frac{1}{2}e^{-2 \times \frac{1}{2}} = -2e^{-1} = -\frac{2}{e} \quad \text{et} \quad f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(2 \times \frac{1}{2} + 1\right)e^{-2 \times \frac{1}{2}} = \frac{2}{e} \quad \text{d'où}$$

$$y = -\frac{2}{e}\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{2}{e} = -\frac{2}{e}x + \frac{1}{e} + \frac{2}{e} \quad \text{et donc l'équation est} \quad \boxed{y = -\frac{2}{e}x + \frac{3}{e}}$$

3)

a. g est la différence entre une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et une fonction affine dérivable sur $\mathbb{R}$ donc g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = f'(x) + \frac{2}{e}$

g' est dérivable également sur $\mathbb{R}$ et $g''(x) = f''(x) = 4(2x-1)e^{-2x}$

b. La fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$ donc $g''(x)$ est du signe de $2x-1$.

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
Signe de $g''(x)$	-	0	+
Variations de g'			

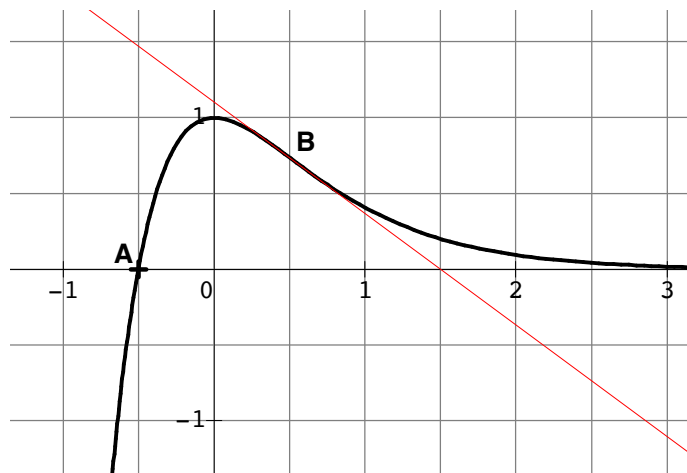
$$g'\left(\frac{1}{2}\right) = f'\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{2}{e} = -\frac{2}{e} + \frac{2}{e} = 0$$

c. g' a donc comme minimum 0 ce qui indique que g' est positive sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	$+\infty$
Signe de $g'(x)$	+	
Variations de g		

d. En $\frac{1}{2}$, g s'annule car c'est l'abscisse du point d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et de sa tangente T . Donc g est négative sur $]-\infty; \frac{1}{2}]$ et positive sur $[\frac{1}{2}; +\infty[$. On en déduit que sur $]-\infty; \frac{1}{2}]$, $\mathcal{C}_f$ est en dessous de T et sur $[\frac{1}{2}; +\infty[$, $\mathcal{C}_f$ est au dessus de T .

4)



Sujet 4 : Centres étrangers – juin 2010

1) Graphiquement, on lit $a \approx 1$ et $b \approx -1$

2)

a. $\mathcal{C}_1$ a pour équation $y = e^x$. C'est la courbe de la fonction $f: x \mapsto e^x$ dérivable sur $\mathbb{R}$. Une équation de la tangente à $\mathcal{C}_1$ au point d'abscisse a est $y = f'(a)(x - a) + f(a)$ soit $y = e^a(x - a) + e^a$ ou encore

$$y = e^a x - ae^a + e^a$$

b. $\mathcal{C}_2$ a pour équation $y = -x^2 - 1$. C'est la courbe de la fonction $g: x \mapsto -x^2 - 1$ dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $g'(x) = -2x$. Une équation de la tangente à $\mathcal{C}_2$ au point d'abscisse b est $y = g'(b)(x - b) + g(b)$ soit

$$y = -2b(x - b) - b^2 - 1 \text{ ou encore } y = -2bx + b^2 - 1$$

c. Les droites T_A et T_B sont confondues si et seulement si elles sont les mêmes coefficients directeurs et les mêmes ordonnées à l'origine

autrement dit si
$$\begin{cases} e^a = -2b \\ -ae^a + e^a = b^2 - 1 \end{cases}$$

d.

$$\begin{aligned} \begin{cases} e^a = -2b \\ -ae^a + e^a = b^2 - 1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} e^a = -2b \\ e^a - ae^a = \left(-\frac{e^a}{2}\right)^2 - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^a = -2b \\ e^a - ae^a = \frac{e^{2a}}{4} - 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} e^a = -2b \\ e^{2a} - 4e^a + 4ae^a - 4 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

3)

a. Pour $x < 0$, on a $2x < 0$ et donc $e^{2x} < e^0$ car la fonction exponentielle est croissante et donc $e^{2x} < 1$ ce qui signifie que $e^{2x} - 4 < 0$.

Par ailleurs, $4e^x$ est positif car l'exponentielle est toujours positive et comme $x - 1 < 0$, on a bien $4e^x(x - 1) < 0$

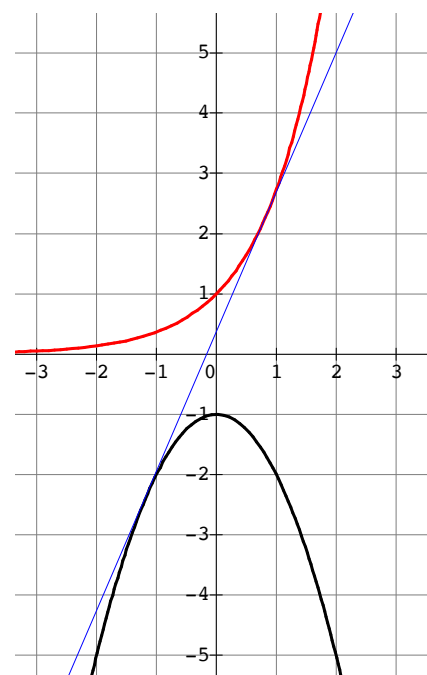
b. Pour $x < 0$, $f(x) = e^{2x} + 4xe^x - 4e^x - 4 = e^{2x} - 4 + 4e^x(x - 1)$

f est donc la somme de deux termes strictement négatifs donc est strictement négatif et l'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solutions dans $]-\infty; 0[$.

c. Sur $[0; +\infty[$, f est une fonction dérivable et $f'(x) = 2e^{2x} + 4e^x + 4xe^x - 4e^x = 2e^{2x} + 4xe^x$. Tout est strictement positif donc f' est positive et la fonction f est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

d. Sur $[0; +\infty[$, la fonction f est continue car dérivable, strictement croissante et $f([0; +\infty[) = [-7; +\infty[$ car $f(0) = -7$ et

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2x} - 4 = +\infty ; \lim_{x \rightarrow +\infty} 4xe^x - 4e^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} 4e^x(x - 1) = +\infty \text{ donc par somme } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$



Donc d'après le théorème de la bijection, l'équation $f(x) = 0$ a une unique solution dans $[0; +\infty[$.

Grâce à la calculatrice, on obtient, $0,84 \leq a \leq 0,85$

4) T_A et T_B sont confondues donc la seule valeur possible pour a est la valeur définie à la question précédente et on a $0,84 \leq a \leq 0,85$. De plus, on a alors $e^a = -2b$ ou encore $b = -\frac{e^a}{2}$.

$0,84 \leq a \leq 0,85 \Leftrightarrow e^{0,84} \leq e^a \leq e^{0,85}$ car la fonction exponentielle est strictement croissante.

$\Leftrightarrow -\frac{e^{0,84}}{2} \geq b \geq -\frac{e^{0,85}}{2}$ car la fonction $x \mapsto -\frac{x}{2}$ est décroissante sur $\mathbb{R}$

Par application numérique, on trouve : $-1,17 \leq b \leq -1,15$ soit $-1,2 \leq b \leq -1,1$