

Test Analyse & Produit Scalaire

EXERCICE N° 1 : (15 pts)

A. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{1}{2} \right\}$ par $f(x) = \frac{-2x^2 + 5x + 4}{2x + 1}$.

On désigne par $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 1 cm.

1 Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

2 Déterminer les réels a , b et c tels que, pour tout x différent de $-\frac{1}{2}$, $f(x) = ax + b + \frac{c}{2x + 1}$.

3 Dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on considère la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = -x + 3$, les points M et N d'abscisse x , placés respectivement sur $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$. On pose $d(x) = f(x) - (-x + 3)$.

a) Donner une interprétation géométrique sur le signe de $d(x)$.

b) Déterminer les limites de $d(x)$ en $+\infty$ et en $-\infty$. Que peut-on en déduire pour $\mathcal{D}$ et $\mathcal{C}$?

c) Étudier le signe de $d(x)$, pour tout réel x différent de $-\frac{1}{2}$; en déduire les positions relatives de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$.

B. 1. Montrer que la dérivée de f a pour expression $f'(x) = \frac{-4x^2 - 4x - 3}{(2x + 1)^2}$.

2. En déduire le tableau des variations de f .

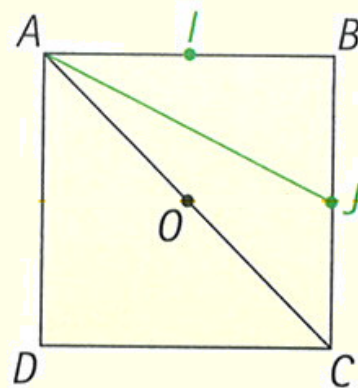
3. Donner une équation de la tangente $\mathcal{T}$ en O .

EXERCICE N° 2 : (5 pts)

$ABCD$ est un carré de côté a et de centre O . Les points I et J sont les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[BC]$.

1° Calculer les produits scalaires :

$$\vec{AI} \cdot \vec{AJ} \text{ et } \vec{AO} \cdot \vec{CD}.$$



2° a. Calculer les longueurs du triangle ACJ.

b. En calculant de deux manières le produit scalaire $\vec{AJ} \cdot \vec{AC}$, déterminer l'angle $\widehat{JAC}$.