

Concours blanc

Algèbre, équations différentielles et analyse

ÉNONCÉ

Niveau : 1re année BCPST · Mathématiques

D'après un concours blanc de fin de 1re année BCPST (juin 2026)

DURÉE 3h30 CALCULATRICE Non autorisée DATE Juin 2026

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. L'usage de la calculatrice, d'abaques et de tables est interdit pour cette épreuve. Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre. Les exercices sont totalement indépendants.

EXERCICE 1 Réduction d'un endomorphisme et matrices diagonales

On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 4 & -4 & -2 \end{pmatrix}.$$

- Déterminer l'image et le noyau de l'endomorphisme $f + 2\text{Id}_{\mathbb{R}^3}$. On note $\vec{e}_1$ un vecteur directeur de la droite $\text{Ker}(f + 2\text{Id}_{\mathbb{R}^3})$.
- Déterminer l'image et le noyau de l'endomorphisme $f - \text{Id}_{\mathbb{R}^3}$. On note $(\vec{e}_2, \vec{e}_3)$ une base du plan $\text{Ker}(f - \text{Id}_{\mathbb{R}^3})$.
- Démontrer que la famille $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
- Justifier que la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est donnée par

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. On entame un raisonnement par l'absurde en supposant qu'il existe un endomorphisme g de $\mathbb{R}^3$ tel que $g \circ g = f$.
- Démontrer que $f \circ g = g \circ f$.
 - Démontrer que $f(g(\vec{e}_1)) = -2g(\vec{e}_1)$. En déduire que $g(\vec{e}_1) \in \text{Ker}(f + 2\text{Id}_{\mathbb{R}^3})$, puis que $g(\vec{e}_1)$ et $\vec{e}_1$ sont colinéaires.
 - Soit $\vec{u} \in \text{Ker}(f - \text{Id}_{\mathbb{R}^3})$. Démontrer que $f(g(\vec{u})) = g(\vec{u})$ et en déduire que $g(\vec{u}) \in \text{Vect}(\vec{e}_2, \vec{e}_3)$.
 - En déduire qu'il existe des nombres réels a, x, y, z, t tels que

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & x & y \\ 0 & z & t \end{pmatrix}.$$

- Démontrer que $(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(g))^2 = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ et en déduire que $a^2 = -2$. Conclure.

6. Écrire une fonction **diagonale** qui prend en argument une matrice (sous forme de liste de listes) et qui renvoie **True** si la matrice est diagonale, **False** sinon. Si la matrice n'est pas carrée, alors la fonction renvoie **False**.

EXERCICE 2 Modèles d'évolution d'une population de bactéries

À l'instant $t = 0$, on introduit N_0 bactéries dans un milieu de culture. Ce problème a pour objet l'étude de deux modèles d'évolution de cette population de bactéries : un premier modèle pour les instants qui suivent l'ensemencement (partie A) ; un second modèle pouvant s'appliquer sur une longue période (partie B).

PARTIE A

Dans les instants qui suivent l'ensemencement du milieu de culture, on considère que la vitesse d'accroissement du nombre de bactéries est proportionnelle au nombre de bactéries en présence. Soit $f(t)$ le nombre de bactéries présentes à l'instant t : la fonction f est donc solution de l'équation différentielle $y' = ay$, où a est un réel strictement positif dépendant des conditions expérimentales.

- Résoudre cette équation différentielle, sachant que $f(0) = N_0$.
- On note T le temps de doublement de la population bactérienne.
 - Exprimer T en fonction de a .

- b) Démontrer que $f(t) = N_0 2^{\frac{t}{T}}$ pour tout réel positif t .

PARTIE B

Le milieu étant limité (en volume et éléments nutritifs), le nombre de bactéries ne peut pas croître indéfiniment : le modèle précédent ne peut ainsi pas s'appliquer sur une longue période. Pour pouvoir prendre en compte ces observations, nous allons donc choisir un autre modèle d'évolution. Soit $g(t)$ le nombre de bactéries présentes à l'instant t ; on suppose que g est une fonction strictement positive et dérivable sur $I = [0 ; +\infty[$, qui vérifie en outre l'équation différentielle

$$y' = ay \left(1 - \frac{y}{M}\right) \quad (E)$$

où a est le réel défini dans la partie A et M une constante strictement positive.

1. Soit g une fonction strictement positive et dérivable sur I . On note $h = \frac{1}{g}$ son inverse.

- a) Montrer que g est solution de (E) si, et seulement si, h est solution de l'équation

$$z' + az = \frac{a}{M} \quad (F).$$

- b) Résoudre l'équation différentielle (F) sur I .

- c) En déduire enfin les solutions de (E), puis l'expression de la fonction g .

2. On admet désormais que $g : t \mapsto \frac{M}{1 + C e^{-at}}$, où $C > 1$ est une constante.

- a) Dresser le tableau de variations de g sur I .

- b) Démontrer qu'il existe un unique réel positif t_0 tel que $g(t_0) = \frac{M}{2}$ (on donnera sa valeur).

- c) Prouver que $g'' = ag' \left(1 - \frac{2g}{M}\right)$ sur I .

- d) En déduire le signe de g'' puis le sens de variation de g' . Interpréter ce résultat.

EXERCICE 3 Tangente hyperbolique et équation fonctionnelle

On définit la fonction tangente hyperbolique notée th par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \text{th}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

PARTIE I / ÉTUDE DE LA FONCTION RÉCIPROQUE DE LA FONCTION TH

1. Montrer, en étudiant ses variations, que th est une bijection de $\mathbb{R}$ dans un intervalle I de $\mathbb{R}$ à préciser. On note Argth sa bijection réciproque.
2.
 - a) Exprimer la dérivée de th en fonction de th .
 - b) Montrer que Argth est dérivable sur I et calculer sa dérivée sur I .
3. Montrer que th est une fonction impaire puis que Argth est aussi une fonction impaire.
4. Exprimer Argth à l'aide des fonctions usuelles.
5. Déterminer un équivalent de Argth en 0.

PARTIE II / ÉTUDE D'UNE ÉQUATION FONCTIONNELLE

Le but de cette partie est de résoudre le problème suivant : déterminer toutes les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles et dérivables en 0, qui vérifient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(2x) = \frac{2f(x)}{1 + (f(x))^2}.$$

1. Déterminer les fonctions constantes solutions du problème posé.
2. Déterminer les différentes valeurs possibles de $f(0)$ si f est solution.
3. Montrer que, si f est solution, on a : $\forall x \in \mathbb{R}, -1 \leq f(x) \leq 1$. On exprimera $f(x)$ en fonction de $f\left(\frac{x}{2}\right)$.
4. Montrer que si f est solution alors $-f$ est aussi solution.
5. Montrer que th est solution du problème posé.
6. On suppose dans cette question que f est solution du problème, $f(0) = 1$ et f n'est pas constante. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) \neq f(0) = 1$: ainsi $f(x_0) < 1$. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de terme général $u_n = f\left(\frac{x_0}{2^n}\right)$.

- a) Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.
- b) Établir une relation entre u_n et u_{n+1} . En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ garde un signe constant suivant le signe de u_0 , puis étudier sa monotonie suivant le signe de u_0 .
- c) En utilisant les résultats des questions a) et b), aboutir à une contradiction.
- d) Que peut-on dire si l'hypothèse « $f(0) = 1$ » est remplacée par « $f(0) = -1$ » ?
- e) Conclure.

7. On suppose maintenant que f est solution du problème et que $f(0) = 0$.

- a) Supposons qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) = 1$ ou $f(x_0) = -1$. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de terme général $u_n = f\left(\frac{x_0}{2^n}\right)$. Montrer que la suite converge vers 0 et que cette suite est constante. Aboutir à une contradiction. Ainsi, à l'aide de la question 3, on a : $\forall x \in \mathbb{R}, -1 < f(x) < 1$. On définit alors la fonction g par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \operatorname{Argh}(f(x)).$$

- b) Montrer : $\forall x \in \mathbb{R}, g(2x) = 2g(x)$.
- c) Montrer que g est dérivable en 0.
- d) Soit $x \in \mathbb{R}^*$. On définit la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{g\left(\frac{x}{2^n}\right)}{\frac{x}{2^n}}$. Montrer que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite. Montrer que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite constante. En déduire que la fonction g est de la forme $x \mapsto \lambda x$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

8. Déterminer toutes les fonctions solutions du problème posé.