

Exercice 1 :

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace, on considère le plan (P) d'équation : $2x + 2y - 3z + 1 = 0$.

On considère les trois points A, B et C de coordonnées : $A(1; 0; 1)$, $B(2; -1; 1)$ et $C(-4; -6; 5)$.

Le but de cet exercice est d'étudier le rapport des aires entre un triangle et le projeté orthogonal de ce triangle dans un plan.

Partie A

1. Pour chacun des points A, B et C , vérifier s'il appartient au plan (P) .

$$2x_A + 2y_A - 3z_A + 1 = 2 + 0 - 3 + 1 = 0 \text{ donc } A \in (P)$$

$$2x_B + 2y_B - 3z_B + 1 = 2 \times 2 + 2 \times (-1) - 3 \times 1 + 1 = 0 \text{ donc } B \in (P)$$

$$2x_C + 2y_C - 3z_C + 1 = -8 - 12 - 15 + 1 \neq 0 \text{ donc } C \notin (P)$$

2. Montrer que le point $C'(0; -2; -1)$ est le projeté orthogonal du point C sur le plan (P) .

$$\text{D'une part : } 2x_{C'} + 2y_{C'} - 3z_{C'} + 1 = 0 - 4 + 3 + 1 = 0 \text{ donc } C' \in (P).$$

D'autre part un vecteur normal au plan (P) est $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ et on a $\overrightarrow{CC'} \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{CC'} = 2\vec{n}$ donc (CC') est orthogonale au plan (P) .

Conclusion : C' est le point d'intersection de la droite orthogonale au plan (P) passant par C et du plan (P) donc C' est bien le projeté orthogonal de C sur le plan (P) .

Remarque : On pouvait aussi déterminer une représentation paramétrique de la droite orthogonale au plan (P) et passant par le point C puis déterminer les coordonnées du point d'intersection de cette droite et du plan (P) pour obtenir les coordonnées du point C' mais c'est plus long.

3. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AB) .

$A(1; 0; 1) \in (AB)$ et $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ dirige la droite (AB) donc une représentation paramétrique de la droite (AB) est :

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -t \\ z = 1 \end{cases} \text{ où } t \in \mathbb{R}.$$

4. On admet l'existence d'un unique point H vérifiant les deux conditions suivantes : $\begin{cases} \bullet H \in (AB) \\ \bullet (AB) \text{ et } (HC) \text{ sont orthogonales} \end{cases}$

Déterminer les coordonnées du point H .

Notons $(x_H; y_H; z_H)$ les coordonnées du point H .

D'une part $H \in (AB)$ donc il existe un réel t tel que $\begin{cases} x_H = 1 + t \\ y_H = -t \\ z_H = 1 \end{cases}$

D'autre part (AB) et (HC) sont orthogonales donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{HC} = 0$.

$$\text{Or } \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{HC} \begin{pmatrix} -4 - x_H \\ -6 - y_H \\ 5 - z_H \end{pmatrix} \text{ donc :}$$

$$1(-4 - x_H) + (-1)(-6 - y_H) + 0(5 - z_H) = 0$$

$$\text{On a donc : } 1(-4 - (1 + t)) + (-1)(-6 - (-t)) = 0$$

$$\text{donc : } -4 - 1 - t + 6 - t = 0$$

$$\text{Donc : } t = \frac{1}{2}$$

$$\text{Conclusion : } H \left(1 + \frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; 1 \right) \text{ donc } \boxed{H \left(\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}; 1 \right)}$$

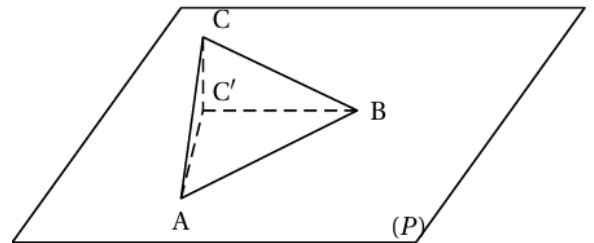
Partie B

On admet que les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{HC}$ sont : $\overrightarrow{HC} \begin{pmatrix} -\frac{11}{2} \\ -\frac{11}{2} \\ 4 \end{pmatrix}$

Remarque : On peut vérifier que ces coordonnées sont bien en accord avec les coordonnées de H trouvées à la question précédente)

1. Calculer la valeur exacte de $\|\overrightarrow{HC}\|$.

$$\|\overrightarrow{HC}\| = HC = \sqrt{\left(-\frac{11}{2}\right)^2 + \left(-\frac{11}{2}\right)^2 + 4^2} = \sqrt{\frac{121 + 121 + 16 \times 4}{4}} = \frac{\sqrt{306}}{2} = \frac{3\sqrt{34}}{2}$$



2. Soit S l'aire du triangle ABC . Déterminer la valeur exacte de S .

Dans le triangle ABC , on sait que (AH) et (HC) sont perpendiculaires et que $H \in (AB)$ donc : $(CH) \perp (AB)$ et donc H est le pied de la hauteur issue de C dans ce triangle.

$$\text{On a donc : } S = \frac{1}{2} \times AB \times CH = \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times \frac{3\sqrt{34}}{2} = \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times \frac{3\sqrt{2} \times \sqrt{17}}{2} = \frac{3\sqrt{17}}{2} \text{ u. a.}$$

Partie C

$$\text{On admet que } HC' = \sqrt{\frac{17}{2}}.$$

1. Soit $\alpha = \widehat{CHC'}$. Déterminer la valeur de $\cos(\alpha)$.

$$\overrightarrow{HC} \cdot \overrightarrow{HC'} = HC \times HC' \times \cos(\widehat{CHC'}) = \frac{3\sqrt{34}}{2} \times \sqrt{\frac{17}{2}} \times \cos(\alpha) = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{34 \times 17}{2}} \cos(\alpha) = \frac{3}{2} \times 17 \cos(\alpha).$$

$$\text{De plus : } \overrightarrow{HC} \begin{pmatrix} -\frac{11}{2} \\ -\frac{11}{2} \\ 4 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{HC'} \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} \\ -2 \end{pmatrix} \text{ donc } \overrightarrow{HC} \cdot \overrightarrow{HC'} = \frac{33}{4} + \frac{33}{4} - 8 = \frac{33}{2} - \frac{16}{2} = \frac{17}{2}$$

$$\text{Conclusion : } \frac{17}{2} = \frac{3}{2} \times 17 \cos(\alpha) \text{ donc } \boxed{\cos(\alpha) = \frac{1}{3}}.$$

2. a. Montrer que les droites $(C'H)$ et (AB) sont perpendiculaires.

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{HC'} = -\frac{3}{2} + \frac{3}{2} + 0 = 0 \text{ donc les droites } (C'H) \text{ et } (AB) \text{ sont orthogonales.}$$

De plus, les points A, B, H et C' appartiennent tous au plan (P) donc les droites $(C'H)$ et (AB) sont coplanaires donc elles sont perpendiculaires.

b. Calculer S' l'aire du triangle ABC' , on donnera la valeur exacte.

On en déduit que le point H est le pied de la hauteur issue de C' dans le triangle ABC' donc :

$$S' = \frac{1}{2} \times AB \times C'H = \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{\frac{17}{2}} = \frac{\sqrt{17}}{2} \text{ u. a.}$$

c. Donner une relation entre S, S' et $\cos(\alpha)$.

$$\text{On a obtenu que : } S = \frac{3\sqrt{17}}{2} \text{ et } S' = \frac{\sqrt{17}}{2} \text{ donc } \frac{S'}{S} = \frac{\frac{\sqrt{17}}{2}}{\frac{3\sqrt{17}}{2}} = \frac{\sqrt{17}}{2} \times \frac{2}{3\sqrt{17}} = \frac{1}{3}$$

$$\text{Conclusion : } \boxed{\frac{S'}{S} = \cos(\alpha)}.$$

Exercice 2 :

L'exercice suivant est Vrai-Faux.

Pour chacune des affirmations, précisez si elle est vraie ou fausse en justifiant soigneusement votre réponse.

Une réponse non justifiée ne rapporte ni n'enlève de point.

1. On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = x \ln(x)$.

Affirmation 1 : La fonction f est une solution sur $]0; +\infty[$ de l'équation différentielle $xy' - y = x$ où y est une fonction définie et dérivable sur $]0; +\infty[$.

$$f = u \times v \text{ où } u: x \mapsto x \text{ et } v: x \mapsto \ln(x) : \text{ les fonctions } u \text{ et } v \text{ sont dérivables sur }]0; +\infty[\text{ donc } f \text{ aussi et } f' = u'v + v'u.$$

$$\text{Pour tout } x \in]0; +\infty[, f'(x) = \ln(x) + \frac{1}{x} \times x = \ln(x) + 1.$$

$$\text{On a donc, pour tout } x \in]0; +\infty[: x f'(x) - f(x) = x(\ln(x) + 1) - x \ln(x) = x \text{ donc } f \text{ est bien solution de l'équation différentielle } xy' - y = x. \quad \text{L'affirmation est vraie.}$$

2. On considère la fonction h définie et continue sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 1 + 2e^{-x^2+1}$.

Affirmation 2 : Il existe une primitive de la fonction h décroissante sur $\mathbb{R}$.

Soit H une primitive de la fonction h sur $\mathbb{R}$ (on sait que h admet des primitives sur $\mathbb{R}$ car h est continue sur $\mathbb{R}$).

$$H \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \text{ et, pour tout réel } x, H'(x) = h(x) = 1 + 2e^{-x^2+1}.$$

Donc, pour tout réel $x, H'(x) > 0$ donc H est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, et ce, pour toute primitive H de la fonction h .

Conclusion : L'affirmation 2 est fausse.

Exercice 3 : (tiré de l'ex 4 du sujet Am Sud sept 2023 J2)

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln(e^x + 1) - \frac{3}{4}x$. On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

Partie A

1. a. Vérifier que, pour tout réel x , $f(x) = \ln(1 + e^{-x}) + \frac{1}{4}x$.

Soit $x \in \mathbb{R}$: $f(x) = \ln(e^x + 1) - \frac{3}{4}x = \ln\left(e^x \left(1 + \frac{1}{e^x}\right)\right) - \frac{3}{4}x = \ln(e^x) + \ln\left(1 + \frac{1}{e^x}\right) - \frac{3}{4}x = x + \ln(1 + e^{-x}) - \frac{3}{4}x$

Conclusion : Pour tout réel x , $f(x) = \ln(1 + e^{-x}) + \frac{1}{4}x$.

b. En déduire la limite de f en $+\infty$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ donc, par limite d'inverse, $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$ donc, par limite de somme, $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + e^{-x} = 1$.

Posons $X = 1 + e^{-x}$ ($X \rightarrow 1$) : $\lim_{X \rightarrow 1} \ln(X) = \ln(1)$ car la fonction $\ln$ est continue en 1 donc $\lim_{X \rightarrow 1} \ln(X) = 0$.

Donc, d'après le théorème de composition, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1 + e^{-x}) = 0$.

De plus, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{4}x = +\infty$ donc, par limite de somme, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1 + e^{-x}) + \frac{1}{4}x = \boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty}$

On admet que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.

2. On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa fonction dérivée.

a. Montrer que, pour tout réel x , $f'(x) = \frac{e^x - 3}{4(e^x + 1)}$.

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f = \ln(u) + v$ où $u: x \mapsto e^x + 1$ et $v: x \mapsto -\frac{3}{4}x$

On a $f' = \frac{u'}{u} + v'$ donc, pour tout réel x : $f'(x) = \frac{e^x}{e^x + 1} - \frac{3}{4} = \frac{4e^x - 3(e^x + 1)}{4(e^x + 1)} = \frac{e^x - 3}{4(e^x + 1)}$.

b. En déduire les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$ et dresser le tableau de variations complet de la fonction f , en calculant la valeur exacte du ou des extremums s'il y a lieu.

Pour tout réel x on a $4(e^x + 1) > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $e^x - 3$ sur $\mathbb{R}$.

$e^x - 3 > 0 \Leftrightarrow e^x > 3 \Leftrightarrow x > \ln(3)$ par stricte croissance de la fonction $\ln$ sur $]0; +\infty[$.

On a aussi : $e^x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \ln(3)$

On a donc :

x	$-\infty$	$\ln(3)$	$+\infty$
Signe de $e^x - 3$ ou de $f'(x)$	-	0	+
Variations de f	$+\infty$	$f(\ln(3))$	$+\infty$

Le minimum de f sur $\mathbb{R}$ est $f(\ln(3)) = \ln(e^{\ln(3)} + 1) - \frac{3}{4}\ln(3) = \ln(3 + 1) - \frac{3}{4}\ln(3) = \ln(4) - \frac{3}{4}\ln(3)$ (la fonction n'a pas de maximum sur $\mathbb{R}$).

c. Montrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[2; 5]$.

$\ln(3) \approx 1,099$ donc $\ln(3) < 2$ et donc la fonction f est strictement croissante sur $[2; 5]$. La fonction f est dérivable, donc continue sur $[2; 5]$.

De plus, $f(2) = \ln(e^2 + 1) - \frac{3}{2} \approx 0,6$ et $f(5) = \ln(e^5 + 1) - \frac{15}{4} \approx 1,26$ donc $1 \in [f(2); f(5)]$.

Ainsi, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution α sur $[2; 5]$.

Partie B

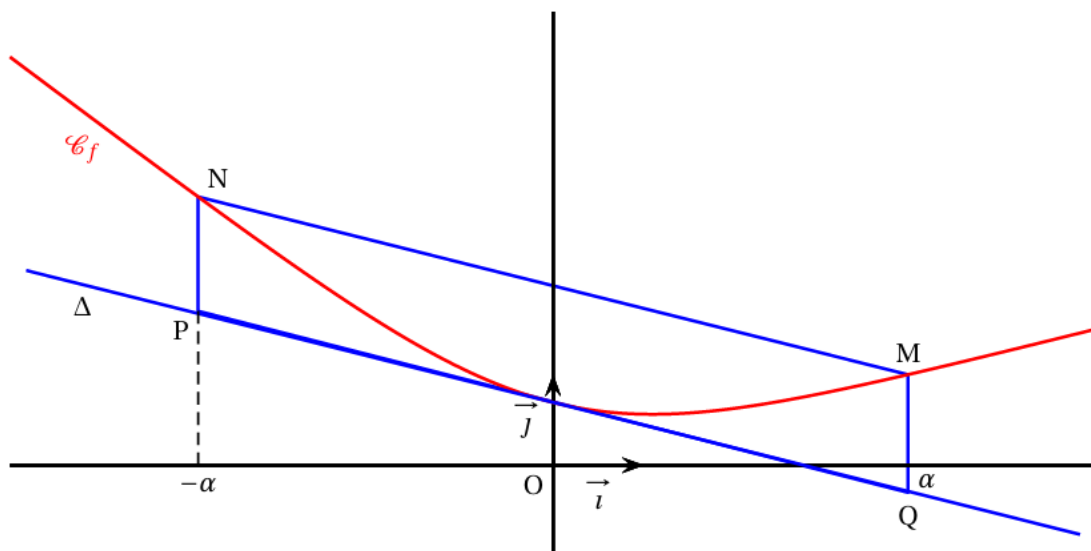
On admettra que la fonction f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x , $f''(x) = \frac{e^x}{(e^x + 1)^2}$.

On note Δ la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0.

Dans le graphique ci-dessous, on a représenté la courbe $\mathcal{C}_f$, la tangente Δ et le quadrilatère $MNPQ$ tel que :

M et N sont les deux points de la courbe $\mathcal{C}_f$ d'abscisses respectives α et $-\alpha$;

Q et P sont les deux points de la droite Δ d'abscisses respectives α et $-\alpha$.



1. a. Justifier le signe de $f''(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

Pour tout réel x , $f''(x) = \frac{e^x}{(e^x+1)^2}$ donc $f''(x) > 0$.

b. En déduire que la portion de la courbe C_f sur l'intervalle $[-\alpha; \alpha]$, est inscrite dans le quadrilatère $MNPQ$.

On déduit de la question précédente que la fonction f est convexe sur $\mathbb{R}$ donc que la courbe $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de toutes ses tangentes sur $\mathbb{R}$. En particulier, la courbe est au-dessus de Δ , donc du segment $[QP]$.

De plus, $\mathcal{C}_f$ est en-dessous de tous les segments qui coupent $\mathcal{C}_f$. En particulier, $\mathcal{C}_f$ est en-dessous du segment $[MN]$ sur $[-\alpha; \alpha]$.

On en déduit que la portion de la courbe $\mathcal{C}_f$ sur l'intervalle $[-\alpha; \alpha]$, est inscrite dans le quadrilatère $MNPQ$.

2. Justifier que $\overrightarrow{PQ} \left(\begin{matrix} 2\alpha \\ -\frac{1}{2}\alpha \end{matrix} \right)$

Les points P et Q appartiennent à la tangente Δ . Déterminons une équation de cette droite :

$$\Delta: y = f'(0)(x - 0) + f(0) \quad \text{avec } f'(0) = \frac{e^0 - 3}{4(e^0 + 1)} = -\frac{2}{8} = -\frac{1}{4} \quad \text{et} \quad f(0) = \ln(e^0 + 1) - \frac{3}{4} \times 0 = \ln(2)$$

$$\text{Donc } \Delta: y = -\frac{1}{4}x + \ln(2).$$

$$x_P = -\alpha \text{ donc } y_P = -\frac{1}{4} \times (-\alpha) + \ln(2) = \frac{\alpha}{4} + \ln(2)$$

$$x_Q = \alpha \text{ donc } y_Q = -\frac{1}{4} \times \alpha + \ln(2) = -\frac{\alpha}{4} + \ln(2)$$

$$\text{On a donc : } \overrightarrow{PQ} \left(\begin{matrix} \alpha - (-\alpha) = 2\alpha \\ -\frac{\alpha}{4} + \ln(2) - \left(\frac{\alpha}{4} + \ln(2) \right) = -\frac{\alpha}{2} \end{matrix} \right) \text{ donc } \overrightarrow{PQ} \left(\begin{matrix} 2\alpha \\ -\frac{1}{2}\alpha \end{matrix} \right)$$

3. a. Montrer que $1 - f(-\alpha) = -\frac{1}{2}\alpha$.

Par définition, $f(\alpha) = 1$ donc $\ln(e^\alpha + 1) - \frac{3}{4}\alpha = 1$ et $\ln(1 + e^{-\alpha}) + \frac{1}{4}\alpha = 1$ (avec la def de $f(x)$ donnée question 1a).

D'après la définition initiale de $f(x)$, on a : $f(-\alpha) = \ln(e^{-\alpha} + 1) - \frac{3}{4}(-\alpha)$

Or $\ln(1 + e^{-\alpha}) = 1 - \frac{1}{4}\alpha$ donc : $f(-\alpha) = 1 - \frac{1}{4}\alpha + \frac{3}{4}\alpha = 1 + \frac{1}{2}\alpha$ donc $1 - f(-\alpha) = -\frac{1}{2}\alpha$.

b. Montrer que le quadrilatère $MNPQ$ est un parallélogramme.

On va montrer que les vecteurs $\overrightarrow{PQ}$ et $\overrightarrow{NM}$ sont égaux.

$M \in \mathcal{C}_f$ et $x_M = \alpha$ et $f(\alpha) = 1$ donc $M(\alpha; 1)$

$N \in \mathcal{C}_f$ et $x_N = -\alpha$ donc $N(-\alpha; f(-\alpha))$

$$\text{On a donc : } \overrightarrow{NM} \left(\begin{matrix} 2\alpha \\ 1 - f(-\alpha) \end{matrix} \right) \text{ donc } \overrightarrow{NM} \left(\begin{matrix} 2\alpha \\ -\frac{1}{2}\alpha \end{matrix} \right).$$

Conclusion : $\overrightarrow{NM}$ et $\overrightarrow{PQ}$ ont les mêmes coordonnées donc $\overrightarrow{NM} = \overrightarrow{PQ}$ donc le quadrilatère $MNPQ$ est un parallélogramme.