

Contrôle n°8 de Mathématiques

Durée : 1h50 minutes

La calculatrice est autorisée

Le barème, sur 19, est donné à titre indicatif, il pourra être modifié

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

Sauf mention contraire, toutes les réponses devront être justifiées.

Exercice 1 : (8,5 points)

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace, on considère le plan (P) d'équation : $2x + 2y - 3z + 1 = 0$.

On considère les trois points A, B et C de coordonnées : $A(1; 0; 1)$, $B(2; -1; 1)$ et $C(-4; -6; 5)$.

Le but de cet exercice est d'étudier le rapport des aires entre un triangle et le projeté orthogonal de ce triangle dans un plan.

Partie A

1. Pour chacun des points A, B et C , vérifier s'il appartient au plan (P) .
2. Montrer que le point $C'(0; -2; -1)$ est le projeté orthogonal du point C sur le plan (P) .
3. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AB) .
4. On admet l'existence d'un unique point H vérifiant les deux conditions suivantes :
 - $H \in (AB)$
 - (AB) et (HC) sont orthogonales

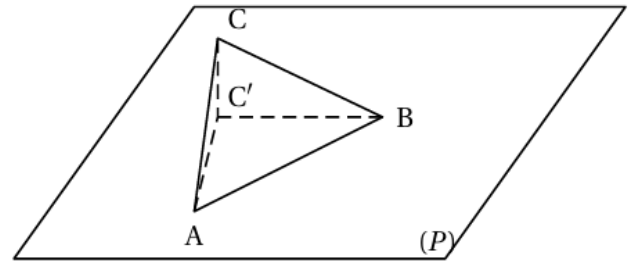
Déterminer les coordonnées du point H .

Partie B

On admet que les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{HC}$ sont :

$$\overrightarrow{HC} \begin{pmatrix} 11 \\ -\frac{2}{2} \\ 11 \\ -\frac{2}{2} \\ 4 \end{pmatrix}$$

1. Calculer la valeur exacte de $\|\overrightarrow{HC}\|$.
2. Soit S l'aire du triangle ABC . Déterminer la valeur exacte de S .



Partie C

On admet que $HC' = \sqrt{\frac{17}{2}}$.

1. Soit $\alpha = \widehat{HC'C}$. Déterminer la valeur de $\cos(\alpha)$.
2. a. Montrer que les droites $(C'H)$ et (AB) sont perpendiculaires.
b. Calculer S' l'aire du triangle ABC' , on donnera la valeur exacte.
c. Donner une relation entre S, S' et $\cos(\alpha)$.

Exercice 2 : (2,5 points)

L'exercice suivant est Vrai-Faux.

Pour chacune des affirmations, précisez si elle est vraie ou fausse en justifiant soigneusement votre réponse.

Une réponse non justifiée ne rapporte ni n'enlève de point.

1. On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = x \ln(x)$.

Affirmation 1 : La fonction f est une solution sur $]0; +\infty[$ de l'équation différentielle $xy' - y = x$ où y est une fonction définie et dérivable sur $]0; +\infty[$.

2. On considère la fonction h définie et continue sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 1 + 2e^{-x^2+1}$.

Affirmation 2 : Il existe une primitive de la fonction h décroissante sur $\mathbb{R}$.

Tournez s'il vous plaît

Exercice 3 : (8 points)

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln(e^x + 1) - \frac{3}{4}x$. On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

Partie A

1. a. Vérifier que, pour tout réel x , $f(x) = \ln(1 + e^{-x}) + \frac{1}{4}x$.

b. En déduire la limite de f en $+\infty$.

On admet que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.

2. On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa fonction dérivée.

a. Montrer que, pour tout réel x , $f'(x) = \frac{e^x - 3}{4(e^x + 1)}$.

b. En déduire les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$ et dresser le tableau de variations complet de la fonction f , en calculant la valeur exacte du ou des extremums s'il y a lieu.

c. Montrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[2; 5]$.

Partie B

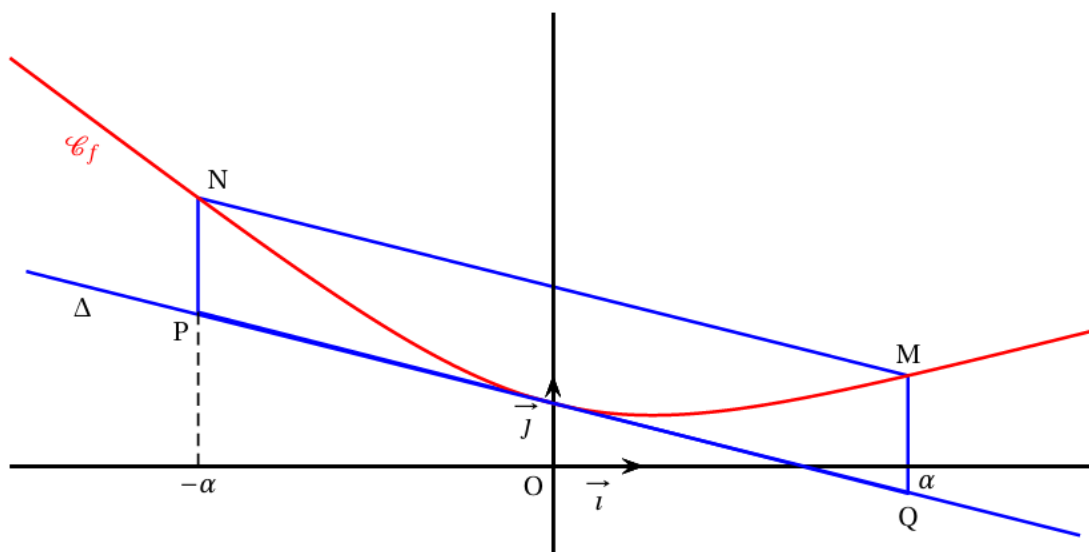
On admettra que la fonction f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x , $f''(x) = \frac{e^x}{(e^x + 1)^2}$.

On note Δ la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0.

Dans le graphique ci-dessous, on a représenté la courbe $\mathcal{C}_f$, la tangente Δ et le quadrilatère $MNPQ$ tel que :

M et N sont les deux points de la courbe $\mathcal{C}_f$ d'abscisses respectives α et $-\alpha$;

Q et P sont les deux points de la droite Δ d'abscisses respectives α et $-\alpha$.



1. a. Justifier le signe de $f''(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

b. En déduire que la portion de la courbe $\mathcal{C}_f$ sur l'intervalle $[-\alpha; \alpha]$, est inscrite dans le quadrilatère $MNPQ$.

2. Justifier que $\overrightarrow{PQ} \begin{pmatrix} 2\alpha \\ -\frac{1}{2}\alpha \end{pmatrix}$

3. a. Montrer que $1 - f(-\alpha) = -\frac{1}{2}\alpha$.

b. Montrer que le quadrilatère $MNPQ$ est un parallélogramme.