

Bac Blanc

Correction

PREMIÈRE PARTIE : AUTOMATISMES - QCM (6 pts)

Pour sujet A :

1. D 2. A 3. C 4. B 5. C 6. A 7. D 8. B

Pour sujet B :

1. B 2. D 3. A 4. C 5. D 6. C 7. B 8. A

DEUXIÈME PARTIE (14 pts)

Exercice 1 sur 6 points

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{-x} > 0$ donc le signe de $f(x)$ est celui de $x^2 - 2$, avec $x^2 - 2 = (x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2})$.

Ainsi :

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$+\infty$	
$x + \sqrt{2}$	$-$	0	$+$		
$x - \sqrt{2}$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

2. $f(0) = (0^2 - 2)e^{-0} = -2$

$\mathcal{C}_f$ coupe l'axe des ordonnées au point de coordonnées $(0 ; -2)$.

3. Soit $x \in \mathbb{R}$. $f(x) = u(x)v(x)$ avec $u(x) = x^2 - 2$ et $v(x) = e^{-x}$

Ainsi, $f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$

$$= 2x \times e^{-x} + (x^2 - 2) \times (-e^{-x})$$

$$= [2x - (x^2 - 2)]e^{-x}$$

$$= (-x^2 + 2x + 2)e^{-x}$$

4. a. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{-x} > 0$ donc le signe de $f'(x)$ est celui de $-x^2 + 2x + 2$.

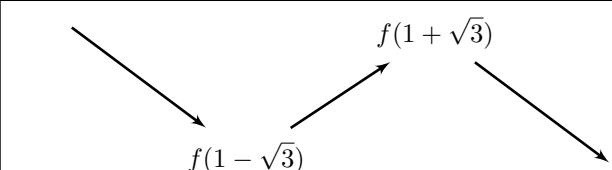
$\Delta = 2^2 - 4 \times (-1) \times 2 = 4 + 8 = 12$. $\Delta > 0$ donc ce polynôme a deux racines :

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-2 - \sqrt{12}}{2 \times (-1)} & \text{et} & & x_2 &= \frac{-2 + \sqrt{12}}{2 \times (-1)} \\ &= \frac{-2 - 2\sqrt{3}}{-2} & & & &= \frac{-2 + 2\sqrt{3}}{-2} \\ &= 1 + \sqrt{3} & & & &= 1 - \sqrt{3} \end{aligned}$$

Puisque $a = -1 < 0$, on obtient :

x	$-\infty$	$1 - \sqrt{3}$	$1 + \sqrt{3}$	$+\infty$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

b.

x	$-\infty$	$1 - \sqrt{3}$	$1 + \sqrt{3}$	$+\infty$
f				

5. T : $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$

$$y = (-0^2 + 2 \times 0 + 2)e^{-0}x + (-2)$$

$$y = 2x - 2$$

6. a.

x	$-\infty$	$+\infty$
g		

b. $g(0) = f(0) - 2 \times 0 + 2 = -2 - 0 + 2 = 0$

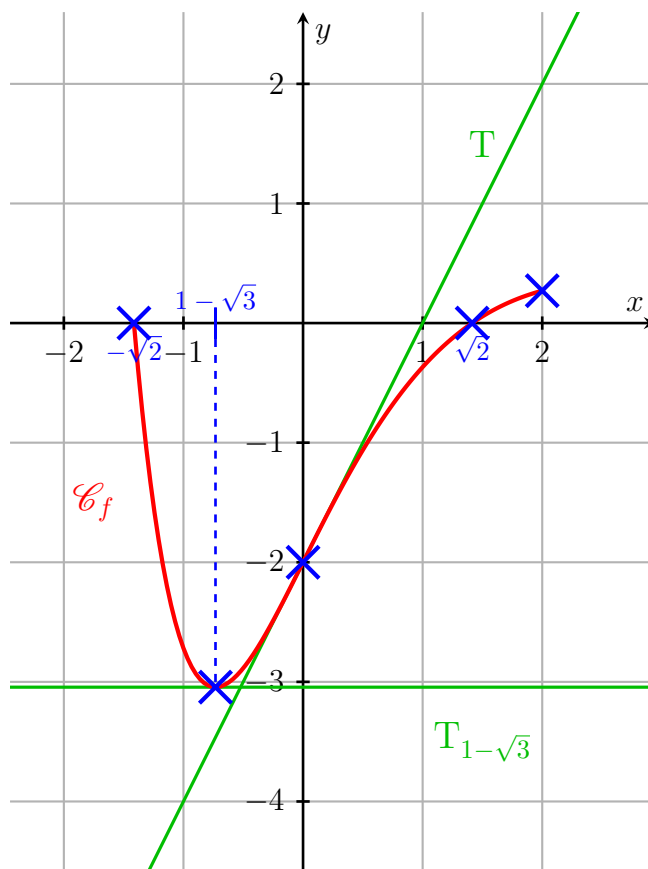
Ainsi, avec la question 6.a. on dresse le tableau de signes de la fonction g sur $[-2 ; 2]$:

x	-2	0	2
$g(x)$	$+$	0	$-$

c. On vient d'étudier le signe de $g(x)$, autrement dit de $f(x) - (2x - 2)$, sur $[-2 ; 2]$.

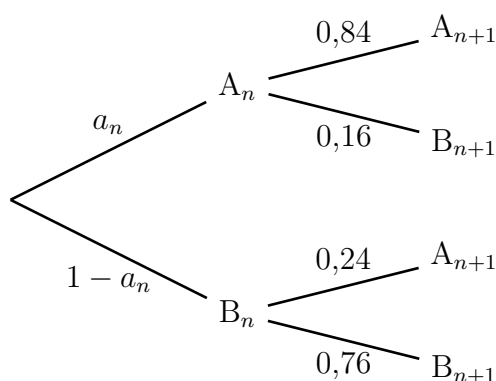
On en déduit que la courbe $\mathcal{C}$ est au-dessus de T sur $[-2 ; 0[$ et en dessous sur $]0 ; 2]$.

7.



Exercice 2 sur 5,5 points

1. a.

b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, les événements A_n et B_n forment une partition de l'univers.D'après la formule des probabilités totales, $P(A_{n+1}) = P(A_n \cap A_{n+1}) + P(B_n \cap A_{n+1})$

$$= a_n \times 0,84 + (1 - a_n) \times 0,24$$

$$= 0,84a_n + 0,24 - 0,24a_n$$

$$= 0,6a_n + 0,24$$

On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_{n+1} = P(A_{n+1}) = 0,6a_n + 0,24$.2. a. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = a_{n+1} - 0,6$

$$= 0,6a_n + 0,24 - 0,6$$

$$= 0,6a_n - 0,36$$

$$= 0,6(a_n - \frac{0,36}{0,6})$$

$$= 0,6u_n$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = 0,6u_n$, donc la suite (u_n) est géométrique de raison $q = 0,6$ et de premier terme $u_1 = a_1 - 0,6 = 0,5 - 0,6 = -0,1$.b. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = u_1 \times q^{n-1} = -0,1 \times 0,6^{n-1}$.c. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = u_n + 0,6 = -0,1 \times 0,6^{n-1} + 0,6 = 0,6 - 0,1 \times 0,6^{n-1}$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_{n+1} - a_n = (0,6 - 0,1 \times 0,6^n) - (0,6 - 0,1 \times 0,6^{n-1})$

$$= 0,6 - 0,1 \times 0,6^n - 0,6 + 0,1 \times 0,6^{n-1}$$

$$= -0,1 \times 0,6^{n-1}(0,6 - 1)$$

$$= -0,1 \times 0,6^{n-1}(-0,4)$$

$$= 0,04 \times 0,6^{n-1}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0,6^{n-1} > 0$ et $0,04 > 0$ donc $0,04 \times 0,6^{n-1} > 0$.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_{n+1} - a_n > 0$.

La suite (a_n) est donc strictement croissante.

4. Au bout d'un très grand nombre de matins, la probabilité que le vélo se trouve au point A sera très proche de 0,6.

5.

```
def seuil(M) :
    a = 0.5
    n = 1
    while a < M :
        n = n + 1
        a = 0.6 * a + 0.24
    return n
```

6. Pour tout entier naturel n non nul, $S = a_1 + \dots + a_n = (u_1 + 0,6) + \dots + (u_n + 0,6)$

$$= (0,6 + \dots + 0,6) + (u_1 + \dots + u_n)$$

$$= 0,6n + u_1 \times \frac{1 - 0,6^n}{1 - 0,6}$$

$$= 0,6n - \frac{0,1}{0,4}(1 - 0,6^n)$$

$$= 0,6n + \frac{0,6^n - 1}{4}$$

Exercice 3 sur 2,5 points

$$1. \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 0-3 \\ 5-4 \end{pmatrix} \text{ donc } \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 5-3 \\ 5-4 \end{pmatrix} \text{ donc } \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$2. \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = -3 \times 2 + 1 \times 1 = -5.$$

$$3. \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}.$$

4. Le cercle $\mathcal{C}$ a pour centre $A(3; 4)$ et pour rayon $AB = \sqrt{5}$, donc admet pour équation cartésienne

$$(x-3)^2 + (y-4)^2 = (\sqrt{5})^2$$

$$\text{or } (x-3)^2 + (y-4)^2 = x^2 - 6x + 9 + y^2 - 8y + 16 = x^2 + y^2 - 6x - 8y + 25$$

$$\text{et } (\sqrt{5})^2 = 5$$

donc l'équation précédente se réécrit

$$x^2 + y^2 - 6x - 8y + 25 = 5$$

ou encore

$$x^2 + y^2 - 2(3x + 4y) = -20$$

5. a. ABDC est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

$$\text{Or } \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} x_D \\ y_D - 5 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Ainsi, } \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \iff (2 = x_D \text{ et } 1 = y_D - 5) \iff (x_D = 2 \text{ et } y_D = 6).$$

Conclusion : $D(2; 6)$.

b. $(2-3)^2 + (6-4)^2 = 5$ donc oui, le point $D(2; 6)$ appartient au cercle $\mathcal{C}$.