

Contrôle n°8 de Mathématiques

Durée : 1h50 minutes

La calculatrice est autorisée

Le barème, sur 19, est donné à titre indicatif, il pourra être modifié

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 : (7,5 points)

On considère le cube $ABCDEFGH$ d'arête 1 représenté ci-contre.

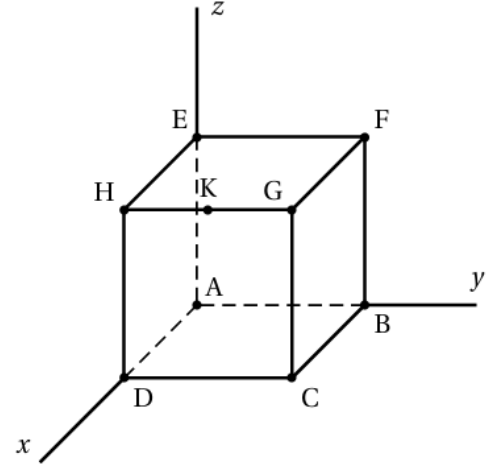
On note K le milieu du segment $[HG]$.

On se place dans le repère orthonormé $(A; \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE})$.

- Justifier que les points C , F et K définissent un plan.
- Donner, sans justifier, les longueurs KG , GF et GC .
 - Calculer l'aire du triangle FGC .
 - En déduire que le volume du tétraèdre $FGCK$ est égal à $\frac{1}{12}$ unités de volume.

On rappelle que le volume V d'un tétraèdre est donné par : $V = \frac{1}{3} \mathcal{B} \times h$, où $\mathcal{B}$ est l'aire d'une base et h la hauteur correspondante.

- On note $\vec{n}$ le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Démontrer que $\vec{n}$ est normal au plan (CFK) .
 - En déduire qu'une équation cartésienne du plan (CFK) est : $x + 2y + z - 3 = 0$.
- On note Δ la droite passant par le point G et orthogonale au plan (CFK) . Démontrer qu'une représentation paramétrique de la droite Δ est : $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = 1 + t \end{cases}$ où $t \in \mathbb{R}$.
- Soit L le point d'intersection entre la droite Δ et le plan (CFK) .
 - Déterminer les coordonnées du point L .
 - En déduire que $LG = \frac{\sqrt{6}}{6}$.
- En utilisant la question 2., déterminer la valeur exacte de l'aire du triangle CFK .



Exercice 2 : (3 points)

L'exercice suivant est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte.

Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie en justifiant soigneusement votre réponse.

Une réponse fausse, une absence de réponse, une réponse multiple ou une réponse non justifiée, ne rapporte ni n'enlève de point.

- On considère la fonction f définie sur $] -1; 1[$ par $f(x) = \frac{x}{1-x^2}$. Une primitive de la fonction f sur $] -1; 1[$ est la fonction g définie par :

$$\text{a. } g(x) = \frac{x^2}{2} \ln(1-x^2) \quad \text{b. } g(x) = \frac{1+x^2}{(1-x^2)^2} \quad \text{c. } g(x) = -\frac{1}{2} \ln(1-x^2) \quad \text{d. } g(x) = \frac{x^2}{2(x-\frac{x^3}{3})}$$

- Dans un repère orthonormé, on considère les points $E(1; 2; 1)$, $F(2; 4; 3)$ et $G(-2; 2; 5)$. On peut affirmer que la mesure α de l'angle $\widehat{FEG}$ vérifie :

$$\text{a. } \alpha \approx 71^\circ \quad \text{b. } \alpha = 0^\circ \quad \text{c. } \alpha = 90^\circ \quad \text{d. } \alpha > 90^\circ$$

Exercice 3 : (8,5 points)

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{x^2} + 1$$

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé. On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $]0; +\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.

1. a. Déterminer les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$.

b. En déduire les éventuelles asymptotes à la courbe $\mathcal{C}_f$.

2. Montrer que, pour tout réel x de l'intervalle $]0; +\infty[$, on a :

$$f'(x) = \frac{1 - 2\ln(x)}{x^3}$$

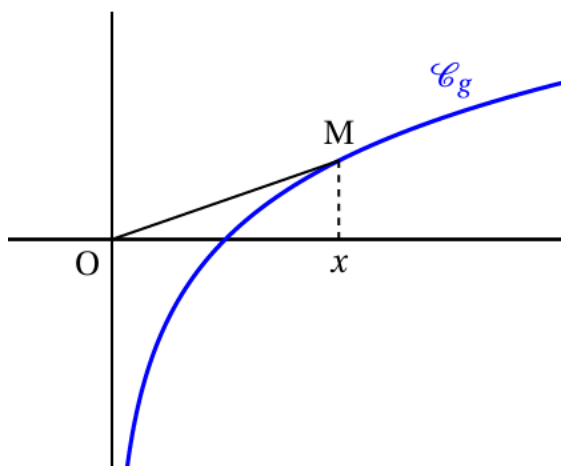
3. En déduire le tableau de variation complet de la fonction f sur l'intervalle $]0; +\infty[$. On donnera la valeur exacte de l'extremum (ou des extrema) de la fonction.

4. a. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ possède une unique solution, notée α , sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

b. En déduire le signe de la fonction f sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

5. On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par : $g(x) = \ln(x)$.

On note $\mathcal{C}_g$ la courbe représentative de la fonction g dans un repère orthonormé d'origine O . On considère un réel x strictement positif et le point M de la courbe $\mathcal{C}_g$ d'abscisse x . On note OM la distance entre les points O et M .



a. Exprimer la quantité OM^2 en fonction du réel x .

b. Montrer que, lorsque le réel x parcourt l'intervalle $]0; +\infty[$, la quantité OM^2 admet un minimum en α .

c. La valeur minimale de la distance OM , lorsque le réel x parcourt l'intervalle $]0; +\infty[$, est appelée distance du point O à la courbe $\mathcal{C}_g$. On note d cette distance.

Montrer que $d = \sqrt{\alpha^2(1 + \alpha^2)}$.