

Devoir surveillé n°4

NOM et Prénom : Classe :

Les calculs doivent être détaillés – Calculatrice autorisée – Le devoir est sur 21 points

Exercice 1 : 5 points

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = n^3 - 22n + 1$.

1. Calculer u_1 et u_2 .
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = 3n^2 + 3n - 21$.
3. En déduire que la suite (u_n) est croissante à partir du rang 3.

Exercice 2 : 4,5 points

On considère la fonction f définie pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par :

$$f(x) = \frac{2 - x^2}{x + 1}$$

1. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ et montrer que :

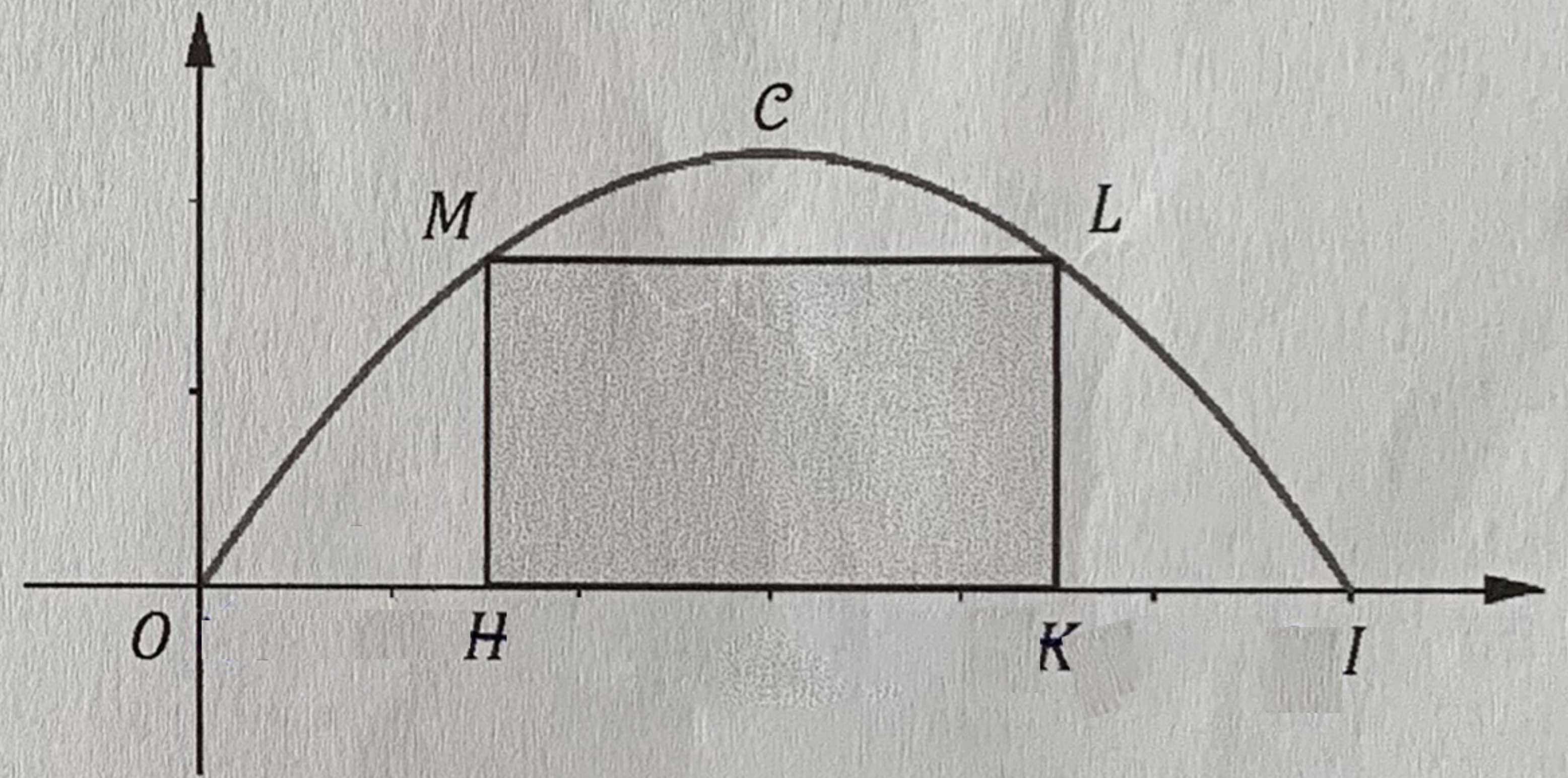
$$f'(x) = \frac{-x^2 - 2x - 2}{(x + 1)^2}$$

2. Etudier les variations de f .

Exercice 3 : 7 points

On considère la figure ci-contre où :

- $OH = KI$ et $OI = 6$ cm ;
- la parabole $\mathcal{C}$ a pour équation $y = -\frac{1}{6}x^2 + x$;
- $HKLM$ est un rectangle où les points M et L appartiennent à la parabole $\mathcal{C}$.



On note x la longueur OH , et $\mathcal{A}(x)$ l'aire du rectangle $HKLM$.

1. Justifier brièvement pourquoi x appartient à l'intervalle $[0; 3]$.
2. Montrer que pour tout $x \in [0; 3]$, $\mathcal{A}(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 6x$.
3. Démontrer que $\mathcal{A}'(x) = (x - 3 + \sqrt{3})(x - 3 - \sqrt{3})$.
4. Déterminer une valeur approchée de l'aire maximale du rectangle $HKLM$, en précisant pour quelle position du point H elle est atteinte.

Exercice 4 : 4,5 points

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (3 - x)\left(\frac{5}{2}x + \frac{3}{2}\right)$.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -5x + 6$.
2. En déduire l'équation réduite de la tangente T à la courbe au point d'abscisse -1 .
3. Déterminer le nombre de tangente à $\mathcal{C}_f$ dont le coefficient directeur vaut -4 .

On précisera l'abscisse des éventuel(s) point(s) concerné(s).