

I Étude thermodynamique d'un chauffe-eau

I(a) Préliminaires

Q1) Un système fermé est un système qui n'échange pas de particules avec le milieu extérieur.

Q2) Par définition, il vient à l'équilibre thermodynamique : $H(S, P, \{n_i\}) = U(S, V, \{n_i\}) + PV$, où l'entropie S , la pression P et les quantités de matière n_i des espèces constituant Σ sont les variables naturelles de H .

Q3)

Cette question ne fait sens que si l'on considère une transformation finie entre les états initial et final.

On suppose que Σ entreprend une transformation *infinitésimale monobare* (au contact d'un barostat de pression $P_{ext} = cst$), avec *équilibre mécanique réalisé aux états initial et final* (de sorte que $P_i = P_f = P_{ext} = cst$).

L'application du premier principe au système Σ durant cette transformation infinitésimale donne :

$$dU = \delta W + \delta Q \Leftrightarrow dU = \delta W_p + \delta W_u + \delta Q$$

Où l'on distingue, au sein du travail δW échangé avec le milieu extérieur, le travail δW_p des forces pressantes exercées par le barostat, du reste du travail, noté δW_u (pour travail utile).

Intéressons-nous à δW_p : $\delta W_p = -P_{ext}dV = -P_{ext}dV$

Il vient ensuite :

$$dU = -P_{ext} \times dV + \delta W_u + \delta Q \Leftrightarrow \Delta U + P_{ext} \times dV = \delta W_u + \delta Q$$

Or la transformation considérée, donc :

$$\Delta U + P_{ext} \times \Delta V = \Delta U + P_{ext} \times (V_f - V_i) = \Delta U + (P_{ext}V_f - P_{ext}V_i) = \Delta U + (P_fV_f - P_iV_i) = \Delta U + \Delta(PV) = \Delta(U + PV) = \Delta H$$

Finalement, le premier principe appliqué à un système fermé subissant une transformation monobare, avec équilibre mécanique réalisé avec le barostat aux états initial et final, se formule :

$$\Delta H = W_u + Q$$

En l'absence de travail utile au cours de la transformation considérée (pas de travail électrique, etc.), il vient :

$$\Delta H = Q$$

Q4) Déterminons la masse de gaz à T_{ext} en équilibre avec le liquide.

La vapeur est saturante, donc la pression de vapeur est égale à la pression de vapeur saturante à T_{ext} : $P = P_{sat}(290 \text{ K})$.

En assimilant la vapeur à un gaz parfait, il vient :

$$P_{sat}V_{gaz} = nRT \Leftrightarrow P_{sat}V_{gaz} = \frac{m}{M}RT \Leftrightarrow m_{gaz} = \frac{P_{sat}V_{gaz}M}{RT} \text{ A. N. : } m_{gaz} = \frac{2.1 \times 10^3 \times (150 - 100) \times 10^{-3} \times 18 \times 10^{-3}}{8.314 \times 290} = 7.83 \times 10^{-4} \text{ kg}$$

En supposant que la majorité de l'eau est sous forme liquide, le volume V_{gaz} accessible au gaz est donc égal au volume V de l'enceinte auquel on soustrait le volume de liquide $V_{liq} = \rho_{liq}m = 100 \text{ L}$.

On a : $m_{gaz} \ll m = 100 \text{ kg}$, ce qui valide l'hypothèse initiale (masse de vapeur d'eau négligeable devant la masse d'eau liquide).

I(b) Récipient isolé

Q5) En modélisant l'eau liquide par une phase condensée indilatable et incompressible, sa variation d'enthalpie H ne dépend que de T et il vient : $\Delta H = m \times c_l \times \Delta T$ (sans qu'un changement d'état ne survienne lors de la variation de température considérée).

La transformation étant supposée isobare (cf. données), l'application du premier principe à la masse d'eau durant la transformation donne :

$$\Delta H = Q \Leftrightarrow Q = m \times c_l \times \Delta T = m \times c_l \times (T_1 - T_{ext}) \quad \text{A.N.: } Q = 100 \times 4.18 \times 10^3 \times (350 - 290) = \boxed{2.51 \times 10^7 \text{ J}}$$

Comment justifier l'application directe du premier principe sur l'ensemble de la transformation finie, et non sur une transformation infinitésimale, lorsque le système est soumis à une puissance thermique constante ?

Dans ce cas, la puissance reçue par le système est constante au cours de la transformation.

Ainsi, l'application du premier principe au cours de la transformation infinitésimale durant la température T du système varie de dT s'écrit : $dH = \delta Q$, avec $dH = m \times c_l \times dT$ [modélisation de la masse d'eau par une phase condensée indilatable et incompressible] et $\delta Q = P_{th} dt$ dans lequel P_{th} est constant au cours de la transformation considérée.

Finalement, en considérant la transformation finie entre les états initial et final considérés, il vient :

$$\Delta H = \int_i^f dH = \int_i^f m \times \underbrace{c_l}_{\substack{\text{supposée} \\ \text{indépendante} \\ \text{de } T}} \times dT = mc_l \int_i^f dT = mc_l \Delta T$$

$$Q = \int_i^f \delta Q = \int_i^f \underbrace{P_{th}}_{\substack{\text{cst} \\ \text{durant la} \\ \text{transfo}}} dt = P_{th} \int_i^f dt = P_{th} \Delta t$$

Finalement, il vient pour la transformation finie considérée : $\Delta H = Q$ avec $\Delta H = mc_l \Delta T$ et $Q = P_{th} \Delta t$

Conclusion : Lorsque le système est soumis à une puissance thermique constante au cours de la transformation, il est possible d'appliquer le principe à l'ensemble de la transformation finie considérée.

Q6) La puissance thermique reçue par l'eau étant constante, il vient :

$$Q = P_{th} \times \Delta t \Leftrightarrow \Delta t = \frac{Q}{P_{th}} = \frac{m \times c_l \times (T_1 - T_{ext})}{P_{th}} \quad \text{A.N.: } \Delta t = \frac{100 \times 4.18 \times 10^3 \times (350 - 290)}{1.5 \times 10^3} = \boxed{1.67 \times 10^4 \text{ s}}$$

Cette durée correspond à environ **4 h 39 min.**

I(c) Récipient soumis à des pertes thermiques

I(c)1. « Marche forcée » du chauffe-eau

Q7) La quantité de chaleur δQ reçue par le système Σ pendant la durée infinitésimale dt modélise les pertes thermiques de Σ pendant dt . Cette énergie étant effectivement cédée au milieu extérieur par le système car de plus basse T que lui, elle est perdue par le système et donc $\delta Q < 0$ J. De là, **il faut nécessaire que k soit positive.**

Pour que la relation soit homogène, il faut que la dimension du membre de gauche soit égale à celle du membre de droite :

$$[\delta Q] = [-k(T - T_{ext})dt] \Leftrightarrow [k] = \frac{[Q]}{[T - T_{ext}][dt]} = \frac{[\text{énergie}]}{[\text{température thermo.}][\text{temps}]} = \frac{[\text{puissance}]}{[\text{température thermo.}]} = \frac{ML^2T^{-2}}{\theta T}$$

$$= \boxed{ML^2\theta^{-1}T^{-3}}$$

k s'exprime donc en $W \cdot K^{-1}$ soit, avec les unités de base du SI, en $kg \cdot m^2 \cdot K^{-1} \cdot s^{-3}$.

Q8) D'après l'énoncé, le chauffage permet juste de compenser les pertes thermiques, dissipée par le système à T_{lim} vers l'extérieur à $T_{ext} < T_{lim}$.

Puisque la température du local est maintenue à T_{lim} , la puissance thermique perdue est : $P_{th, \text{cédée à } l_{ext}} = k(T_{lim} - T_{ext})$

Le chauffage compensant ces pertes, il vient : $P_{th, \text{reçue chauff.}} = P_{th, \text{cédée à } l_{ext}}$ avec $P_{th, \text{reçue chauff.}} = 1.5 \times 10^3 \text{ W}$.

Finalement, il vient :

$$k = \frac{P_{th, \text{reçue chauff.}}}{T_{lim} - T_{ext}} \quad \text{A.N.: } k = \frac{1.5 \times 10^3}{370 - 290} = \boxed{1.88 \times 10^1 \text{ W} \cdot K^{-1}}$$

I(c)2. Arrêt du chauffe-eau

Q9) L'application du premier principe à {l'eau liquide Σ } contenue dans le chauffe-eau durant la transformation isobare infinitésimale considérée donne :

$$dH = \delta W_u + \delta Q_{reçu}$$

avec $dH = mc_l dT$ [phase condensée indilatable et incompressible], $W_u = 0$ [pas de travail additionnel], $\delta Q_{reçu} = -k(T - T_{ext})dt$ [modélisation du flux conducto-convectif à l'interface chauffe-eau / air à l'aide de la loi phénoménologique de Newton].

De là, il vient :

$$mc_l dT = -k(T - T_{ext})dt \Leftrightarrow \frac{dT}{dt} = -\frac{k}{mc_l}(T - T_{ext})$$

Il s'agit d'une équation différentielle linéaire (EDL) du premier ordre non homogène à coefficients constants.

Par homogénéité de l'EDL, $\frac{k}{mc_l}$ doit être homogène à l'inverse d'un temps. On définit donc la constante de temps caractéristique τ par :

$$\frac{k}{mc_l} = \frac{1}{\tau} \Leftrightarrow \tau = \frac{mc_l}{k}$$

L'EDL se réécrit sous la forme : $\frac{dT}{dt} = -\frac{1}{\tau}(T - T_{ext})$

Pourquoi ne pas appliquer directement, dans ce cas de figure pour lequel la puissance thermique échangée n'est pas constante au cours de la transformation, le premier principe à la transformation finie ?

Dans ce cas, contrairement à la Q5), la puissance reçue par le système n'est pas constante au cours de la transformation, puisqu'elle dépend de la température du système.

Ainsi, l'application du premier principe au cours de la transformation infinitésimale durant la température T du système varie de dT s'écrit : $dH = \delta Q$, avec $dH = m \times c_l \times dT$ [modélisation de la masse d'eau par une phase condensée indilatable et incompressible] et $\delta Q = P_{th} dt = -k(T - T_{ext})dt$ dans lequel P_{th} est constant au cours de la transformation considérée.

Il vient alors :

$$mc_l dT = -k(T - T_{ext})dt \Leftrightarrow \frac{dT}{dt} = -\frac{k}{mc_l}(T - T_{ext})$$

L'intégration directe de l'expression sur l'ensemble de la transformation finie doit s'effectuer avec la méthode dite de *séparation des variables* :

$$\frac{dT}{T - T_{ext}} = -\frac{k}{mc_l} dt$$

On intègre l'expression entre l'état initial et final pour l'appliquer à la transformation finie considérée :

$$\int_i^f \frac{dT}{T - T_{ext}} = -\frac{k}{mc_l} \int_i^f dt \Leftrightarrow \left[\ln(T - T_{ext}) \right]_{T_i=T_{lim}}^{T_f=T} = -\frac{1}{\tau} [t]_{t_i=0}^{t_f=t} \Leftrightarrow \ln\left(\frac{T - T_{ext}}{T_{lim} - T_{ext}}\right) = -\frac{t}{\tau}$$

$$\Leftrightarrow T - T_{ext} = (T_{lim} - T_{ext}) \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \Leftrightarrow T = (T_{lim} - T_{ext}) \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + T_{ext}$$

Conclusion : Lorsque le système est soumis à une puissance thermique qui n'est pas constante au cours de la transformation, il faut appliquer le premier principe à une transformation infinitésimale, puis intégrer avec la méthode de *séparation des variables* ou résoudre l'EDL obtenue.

Q10) La solution de cette EDL du premier ordre est de la forme : $T(t) = T_h(t) + T_{part}(t)$

- $T_{part}(t)$ est une solution particulière, cherchée sous la forme d'une constante, puisque le second membre de l'EDL est une constante. Il vient : $T_{part}(t) = T_{ext} = cst.$
- $T_h(t)$ est une solution de l'EDL homogène [sans second membre] $\frac{dT}{dt} = -\frac{T}{\tau}$. On sait alors que : $T_h(t) = A \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right).$
- Il vient : $T(t) = A \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + T_{ext}.$

La condition aux limites $T(t = 0 \text{ s}) = T_{lim}$ permet de déterminer la valeur de A :

$$T(t = 0 \text{ s}) = T_{lim} \Leftrightarrow A \exp\left(-\frac{0}{\tau}\right) + T_{ext} = T_{lim} \Leftrightarrow A = T_{lim} - T_{ext}$$

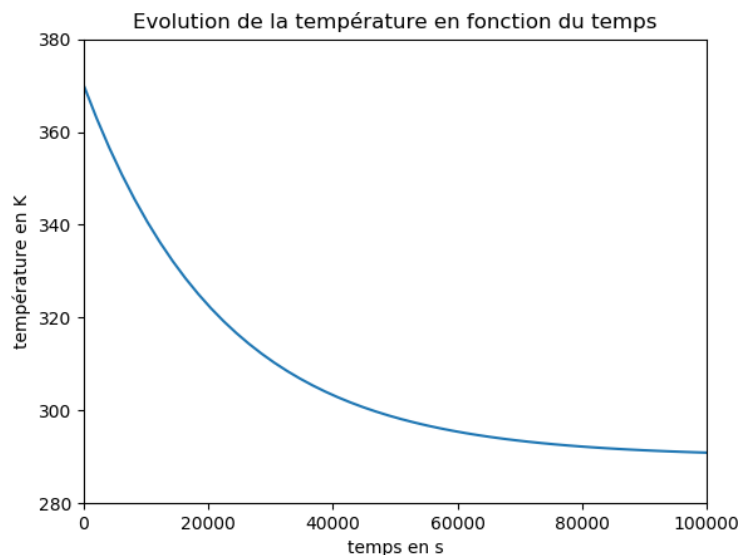
Finalement :

$$T(t) = [T_{lim} - T_{ext}] \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + T_{ext}$$

Il est possible d'aller plus rapidement pour la résolution de l'EDL, en disant que $T(t) = T_h(t) + T_{part}(t)$, puis en donnant directement les expressions de $T_h(t)$ et de $T_{part}(t)$.

Expliciter ensuite la détermination de la constante de $T_h(t)$ à l'aide des conditions aux limites, puis conclure.

Q11)



I(c)3. Montée en température de la masse d'eau

Q12) On rajoute la puissance thermique P_{th} reçue de la part du chauffage, dans l'expression du premier principe formulé sous forme de bilan de puissance appliqué à Σ durant la transformation infinitésimale isobare considérée :

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dt} &= P_{th, cedée \text{ à } l'ext} + P_{th, reçue \text{ du chauffage}} \Leftrightarrow mc_l \frac{dT}{dt} = -k(T - T_{ext}) + P_{th} \Leftrightarrow \frac{dT}{dt} = -\frac{k}{mc_l}(T - T_{ext}) + \frac{1}{mc_l}P_{th} \\ &\Leftrightarrow \frac{dT}{dt} = -\frac{1}{\tau}(T - T_{ext}) + \frac{1}{k\tau}P_{th} \Leftrightarrow \boxed{\frac{dT}{dt} = -\frac{1}{\tau}\left(T - \left(T_{ext} + \frac{1}{k}P_{th}\right)\right)} \end{aligned}$$

en exploitant les considérations effectuées précédemment pour la détermination de la constante de temps caractéristique τ .

Il s'agit d'une **équation différentielle linéaire (EDL) du premier ordre non homogène à coefficients constants**.

Q13) La solution de cette EDL du premier ordre est de la forme : $T(t) = T_h(t) + T_{part}(t)$

- $T_{part}(t)$ est une solution particulière, cherchée sous la forme d'une constante, puisque le second membre de l'EDL est une constante. Il vient : $T_{part}(t) = T_{ext} + \frac{1}{k}P_{th} = cst.$
- $T_h(t)$ est une solution de l'EDL homogène [sans second membre] $\frac{dT}{dt} = -\frac{T}{\tau}$. On sait alors que : $T_h(t) = B \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right).$
- Il vient : $T(t) = B \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + T_{ext} + \frac{1}{k}P_{th}.$

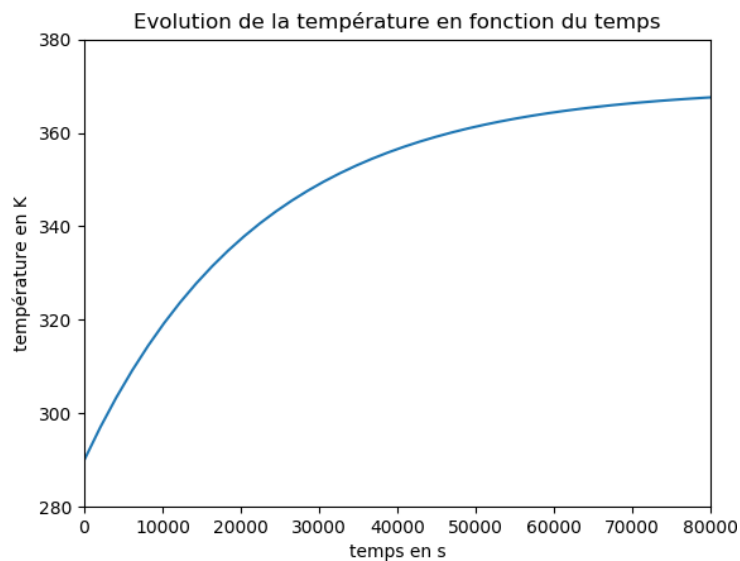
La condition aux limites $T(t = 0 \text{ s}) = T_{ext}$ permet de déterminer la valeur de B :

$$T(t = 0 \text{ s}) = T_{ext} \Leftrightarrow B \exp\left(-\frac{0}{\tau}\right) + T_{ext} + \frac{1}{k}P_{th} = T_{ext} \Leftrightarrow B = -\frac{1}{k}P_{th}$$

Finalement :

$$T(t) = -\frac{1}{k}P_{th} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + T_{ext} + \frac{1}{k}P_{th} = \frac{1}{k}P_{th} \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right) + T_{ext}$$

Q14) L'asymptote de T en $+\infty$ est : $T_{ext} + \frac{1}{k}P_{th}$ A.N. : $T_{ext} + \frac{1}{k}P_{th} = 290 + \frac{1.5 \times 10^3}{1.88 \times 10^1} = 370 \text{ K} = T_{lim}$, ce qui est cohérent avec ce qui était annoncé précédemment concernant le fonctionnement du chauffe-eau.



Q15) On cherche la date t_1 telle que $T(t_1) = T_1 = 350 \text{ K}$:

$$T(t_1) = T_1 \Leftrightarrow \frac{1}{k}P_{th} \left(1 - \exp\left(-\frac{t_1}{\tau}\right)\right) + T_{ext} = T_1 \Leftrightarrow 1 - \exp\left(-\frac{t_1}{\tau}\right) = \frac{k}{P_{th}}(T_1 - T_{ext}) \Leftrightarrow \exp\left(-\frac{t_1}{\tau}\right) = 1 - \frac{k}{P_{th}}(T_1 - T_{ext})$$

$$\Leftrightarrow t_1 = -\tau \ln\left(1 - \frac{k}{P_{th}}(T_1 - T_{ext})\right) \Leftrightarrow \Delta t' = t_1 - 0 \text{ s} = -\tau \ln\left(1 - \frac{k}{P_{th}}(T_1 - T_{ext})\right)$$

$$\text{A. N. : } \Delta t' = -\frac{100 \times 4.18 \times 10^3}{1.88 \times 10^1} \ln\left(1 - \frac{1.88 \times 10^1}{1.5 \times 10^3}(350 - 290)\right) = 3.10 \times 10^4 \text{ s} \text{ soit } 8 \text{ h } 37 \text{ min}$$

On note que **le temps de chauffe $\Delta t'$ déterminé en tenant compte des déperditions thermiques est bien plus important que celui Δt déterminé sans en tenir compte.**

Il vient donc que **ces déperditions thermiques au contact de l'air ne sont pas négligeables** et doivent être prises en compte pour déterminer le temps de chauffe de l'eau contenue dans le chauffe-eau.

I(c)4. Résolution de problème : Isolation d'un chauffe-eau

Q16)

① Problématique : On souhaite déterminer l'épaisseur des parois en polystyrène expansé du chauffe-eau « PRODIGIO » de 150 L.

② Hypothèses de travail : Le système étudié est {l'eau contenue dans le chauffe-eau}. Il s'agit d'un système fermé mais non isolé, pouvant échanger de la chaleur à travers les parois du chauffe-eau. La transformation permettant le chauffage de l'eau est supposée isobare, comme dans le reste de l'exercice que nous venons de traiter.

On considère que le régime stationnaire est atteint, pour lequel la température de l'eau dans le chauffe-eau est maintenue à $T_{int} = 65\text{ °C}$, alors que celle de l'air est de $T_{ext} = 20\text{ °C}$. L'énergie fournie à l'eau afin de la maintenir à cette température pendant 24 h est appelée consommation d'entretien dans le Document 1.

③ Résolution : D'après le premier principe appliqué au système {eau dans le chauffe-eau} :

$$\Delta H = \underbrace{0\text{ J}}_{\substack{\text{car la } T \text{ de l'eau} \\ \text{est maintenue} \\ \text{constante}}} = W_u + Q = P_{th\text{ reçue,entretien}}\Delta t + P_{th\text{ reçue,échangé avec l'ext}}\Delta t$$

$$\text{Donc il vient : } P_{th\text{ reçue,entretien}} = -P_{th\text{ reçue,échangé avec l'ext}} = P_{th\text{ cédée,échangé avec l'ext}} = +hS(T_{int} - T_{ext})$$

Par définition de la résistance thermique, il vient $R_{th} = \frac{\Delta T}{P_{th}} = \frac{1}{hS}$, liée à la résistance thermique surfacique r_{th} selon $r_{th} = R_{th} \times S$, avec S la surface d'échange, en exploitant le Document 4.

Finalement, il vient :

$$r_{th} = R_{th} \times S = \frac{(T_{int} - T_{ext})S}{P_{th\text{ reçue,entretien}}}$$

Déterminons $P_{th\text{ reçue,entretien}}$. La consommation d'entretien pour le chauffe-eau de 150 L est, d'après le Document 1, de 1.59 kWh pour 24 h, avec $T_{int} = T(\text{eau}) = 65\text{ °C}$ et $T_{ext} = T(\text{air}) = 20\text{ °C}$. Or $1\text{ kWh} = 3.6\text{ MJ}$ d'après le Document 3.

$$P_{th\text{ reçue,entretien}} = \frac{E}{\Delta t} \quad \text{A. N. : } P_{th\text{ reçue,entretien}} = \frac{1.59 \times 3.6 \times 10^6}{24 \times 60 \times 60} = 6.6 \times 10^1\text{ W}$$

À l'aide des rappels du Document 2 et des mensurations du Document 1 :

$$S = 2S_{base} + S_{lat} = 2\pi \left(\frac{\phi}{2}\right)^2 + 2\pi \frac{\phi}{2} H \quad \text{A. N. : } S = S_{base} + S_{lat} = 2\pi \left(\frac{505 \times 10^{-3}}{2}\right)^2 + 2\pi \frac{505 \times 10^{-3}}{2} 1290 \times 10^{-3} = 2.44\text{ m}^2$$

Pour les dimensions de la base, il était également possible de choisir $\frac{c}{2}$ pour le rayon de la base, le chauffe-eau n'étant pas parfaitement cylindrique. Cela aurait donné : $S = 2.59\text{ m}^2$

Finalement :

$$\text{A. N. : } r_{th} = \frac{(65 - 20) \times 2.44}{6.6 \times 10^1} = 1.66\text{ m}^2 \cdot \text{K} \cdot \text{W}^{-1}$$

④ Conclusion : La valeur obtenue est entre deux des valeurs tabulées du Document 5.

Or, avec $S = 2.59\text{ m}^2$ obtenue en prenant $\frac{c}{2}$ pour le rayon de la base, on aurait eu : $r_{th} = 1.77\text{ m}^2 \cdot \text{K} \cdot \text{W}^{-1}$.

Les valeurs obtenues sont ainsi plus proches de $r_{th,\text{réf.}} = 1.80\text{ m}^2 \cdot \text{K} \cdot \text{W}^{-1}$, soit du PSE (polystyrène expansé) d'épaisseur 80 mm.

L'épaisseur de l'isolant est donc de 80 mm.

II Cycle de Beau de Rochas

Q17) Une transformation adiabatique est une **transformation durant laquelle le système n'échange pas de chaleur** (aussi appelée transfert thermique) **avec le milieu extérieur**. Elle s'effectue donc dans une enceinte calorifugée, aux parois athermanes (qui ne laissent pas passer la chaleur).

Q18) Par définition du facteur adiabatique γ , il vient : $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$.

Par définition de l'enthalpie et en exploitant l'équation d'état du gaz parfait (GP), il vient : $H = U + PV = U + nRT$.

Or, par définition des capacités thermiques : $C_p = \left. \frac{\partial H}{\partial T} \right|_{P, \{n_i\}}$ et $C_v = \left. \frac{\partial U}{\partial T} \right|_{V, \{n_i\}}$.

Or pour un système fermé de GP, U ne dépend que de T (1^{ère} loi de Joule) et H ne dépend que de T (2^{ème} loi de Joule) : les différentielles partielles $\frac{\partial X}{\partial T}$ par rapport à la température s'identifient alors aux différentielles totales exactes dX divisée par une variation infinitésimale de température dT . D'où pour un système fermé de GP : $C_p = \frac{dH}{dT}$ et $C_v = \frac{dU}{dT}$.

On dérive $H = U + nRT$ pour un système fermé de GP par rapport à la température : $H'(T) = U'(T) + nR \times 1$, ce qui donne par définition des différentielles totales exactes : $\frac{dH}{dT} = \frac{dU}{dT} + nR$, soit : $C_p = C_v + nR$ (relation de Mayer pour un GP).

De là :

$$\begin{cases} C_p = C_v + nR \\ \gamma = \frac{C_p}{C_v} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \gamma C_v = C_v + nR \\ C_p = \gamma C_v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_v(\gamma - 1) = nR \\ C_p = \gamma C_v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_v = \frac{nR}{\gamma - 1} \\ C_p = \frac{\gamma nR}{\gamma - 1} \end{cases}$$

Il est bien sûr possible d'aller plus rapidement ; j'ai détaillé pour rendre la démonstration accessible à tous.

Je résume les jalons de la preuve ci-dessous :

1. Définition de l'enthalpie et expression pour un GP ;
2. Définitions générales de C_p et de C_v , puis simplification pour un système fermé de GP à l'aide des deux lois de Joule ;
3. Établissement de la relation de Mayer pour un GP, en dérivant l'expression de l'enthalpie pour un GP par rapport à la température ;
4. Conclusion avec la relation de définition de γ (qui sera rappelée si besoin est).

Q19) Soit un système fermé de GP.

► **La transformation A → B est une compression adiabatique réversible.** On peut donc lui appliquer la relation de Laplace $PV^\gamma = \text{cst}$.

Or, le rendement est ici exprimé à l'aide des températures et du taux de compression obtenu à partir des volumes. On utilise donc une autre forme de la relation de Laplace qui ne fait intervenir que T et V , en exploitant l'équation d'état du GP : $PV = nRT$.

$$PV^\gamma = \text{cst} \Leftrightarrow \frac{nRT}{V} V^\gamma = \text{cst} \Leftrightarrow TV^{\gamma-1} = \text{cst}'$$

$$\text{De là : } T_A V_A^{\gamma-1} = T_B V_B^{\gamma-1} \Leftrightarrow T_B = T_A \left(\frac{V_A}{V_B} \right)^{\gamma-1} \Leftrightarrow T_B = T_A \tau^{\gamma-1}$$

► Par un raisonnement analogue pour **la transformation C → D (qui est également une transformation adiabatique réversible)**, il en résulte que : $T_C V_C^{\gamma-1} = T_D V_D^{\gamma-1} \Leftrightarrow T_D = T_C \left(\frac{V_C}{V_D} \right)^{\gamma-1}$

Or, d'après le diagramme de Watt, il vient : $V_C = V_B$ et $V_D = V_A$.

$$\text{Donc : } T_D = T_C \left(\frac{V_B}{V_A} \right)^{\gamma-1} \Leftrightarrow T_D = T_C (\tau^{-1})^{\gamma-1} \Leftrightarrow T_D = T_C \tau^{1-\gamma} \Leftrightarrow T_C = T_D \tau^{\gamma-1}$$

Or, le rendement η_1 du cycle de Beau et Rochas s'écrit : $\eta_1 = 1 + \frac{T_A - T_D}{T_C - T_B}$.

On remplace T_B et T_D par leurs expressions :

$$\eta_1 = 1 + \frac{T_A - T_D}{T_D \tau^{\gamma-1} - T_A \tau^{\gamma-1}} = 1 + \frac{T_A - T_D}{(T_D - T_A) \tau^{\gamma-1}} = 1 + \frac{1}{-\tau^{\gamma-1}} = \frac{1 - \tau^{1-\gamma}}{1} \text{ A.N. : } \eta_1 = 1 - (10)^{1-1.4} = 0.60 \text{ soit } 60 \%$$

Q20) En réalité, le rendement réel d'un moteur est inférieur au rendement théorique car les transformations mises en jeu sont **irréversibles**. Ces irréversibilités sont dues à plusieurs sources, parmi lesquelles on peut citer les **frottements mécaniques**.

III Calorimétrie

III(a) De la glace qui fond

Corrigé proposé par Etienne Thieberge, avec des questions d'analyse pour vous amener à réfléchir sur la démarche mise en place pour répondre (Thermodynamique – TD 5, Lycée Corneille, MPSI 2 ; accessible à : https://www.etienne-thieberge.fr/cours_mpsi/T5_chgt-etat_td-enonce.pdf [consulté en décembre 2025]).

Q20)

Correction — Le système sur lequel on raisonne est constitué de toute l'eau (liquide + glace) contenue dans le calorimètre. Il n'échange clairement aucun travail avec l'extérieur, et comme les parois du calorimètre sont calorifugées il n'échange pas non plus de transfert thermique. La transformation étant monobare avec équilibre mécanique, on travaille en enthalpie.

Question d'analyse 1 - Pourquoi la transformation est-elle monobare ?

1 - Au cours de cette transformation,

- la température de l'eau liquide passe de T_1 à T_F ;
- la glace fond et se réchauffe, ce que l'on décompose comme la succession de deux transformations élémentaires :
 - d'abord, la glace fond totalement de manière isobare isotherme ;
 - ensuite, « la glace » est liquide et sa température passe de T_{fus} à T_F .

Le bilan d'enthalpie s'écrit donc :

$$\Delta H = \underbrace{0}_{\substack{\uparrow \\ \text{1er P}}} + \underbrace{0}_{\substack{\uparrow \\ \text{transf}}} = \underbrace{m_{liq} c (T_F - T_1)}_{\text{liquide}} + \underbrace{m_{gl} \Delta_{fus} h + m_{gl} c (T_F - T_{fus})}_{\text{glace}}$$

Question d'analyse 2 - Pourquoi peut-on décomposer en deux étapes successives la transformation subie par la glace, alors qu'en réalité les deux phénomènes ont lieu simultanément ?

Question d'analyse 3 - Pourquoi le transfert thermique fourni par l'eau liquide à la glace n'apparaît-il pas dans le bilan d'enthalpie ?

On en déduit alors

$$T_F = \frac{m_{gl} c T_2 + m_{liq} c T_1 - m_{gl} \Delta_{fus} h}{(m_{gl} + m_{liq}) c} = 260 \text{ K} = -13 \text{ °C}.$$

Il y a donc une contradiction : l'eau est supposée liquide, et pourtant à la température trouvée elle devrait être solide. **L'hypothèse d'eau complètement liquide est donc fausse.**

Q21)

2 - Si l'eau est présente à la fois sous forme liquide et solide, alors la température finale est forcément

$$T_F = T_{fus} = 0 \text{ °C}.$$

Question d'analyse 4 - Pourquoi la température finale ne peut-elle pas valoir autre chose que T_{fus} ?

La transformation se décompose cette fois de la façon suivante :

- la température de l'eau liquide passe de T_1 à T_{fus} ;
- une masse $x m_{gl}$ ($0 < x < 1$) de glace fond, mais sa température ne varie pas.

Le bilan d'enthalpie s'écrit donc :

$$\Delta H = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{1er } P}}{0} + 0 = \underbrace{m_{\text{liq}} c (T_F - T_{\text{fus}})}_{\text{liquide}} + \underbrace{x m_{\text{gl}} \Delta_{\text{fus}} h}_{\text{glace}}$$

Question d'analyse 5 - Pourquoi x apparaît-il dans le terme associé à la glace et pas dans celui associé à l'eau liquide ?

On en déduit

$$x = \frac{m_{\text{liq}} c (T_1 - T_{\text{fus}})}{m_{\text{gl}} \Delta_{\text{fus}} h} = 0,51 .$$

Cette valeur est physiquement acceptable : on en déduit que l'hypothèse est validée. Ainsi, dans l'état final, le calorimètre contient 1,25 kg d'eau liquide et 0,25 kg de glace, le tout à 0 °C.

Question d'analyse 6 - Quelles auraient été les valeurs de x qui auraient donné lieu à une contradiction entre l'hypothèse faite et le résultat ?

Attention à la cohérence physique des hypothèses lors de la construction de la transformation auxiliaire : si l'eau liquide refroidit, alors pour conserver l'enthalpie il faut nécessairement que de la glace fonde. Ceci étant, dans le cas où vous auriez supposé que l'eau refroidissait puis gelait, vous auriez abouti à une contradiction.

III(b) Combien de glaçons dans le jus de fruits ?

Q22)

La réponse à un problème ouvert n'est pas unique et dépend de la démarche de résolution que vous mettez en place.

Celle que je propose n'est donc qu'une option parmi d'autres.

① **Problématique** : Le but est de déterminer le nombre N de glaçons (dont nous estimerons plus tard la masse unitaire m_g) sortis du congélateur (à T_{cong}), afin de refroidir le contenu d'un verre de jus de fruits (de masse m_{jf}) à la température à laquelle son contenu serait s'il avait été conservé au frigo (notée T_{frigo}).

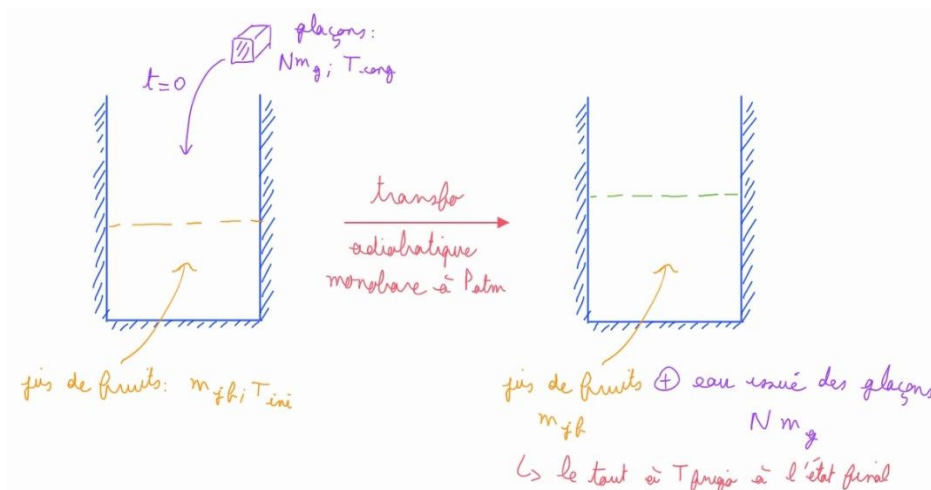
② **Hypothèses de travail** : La transformation entreprise par le système {jus de fruits + glaçons} est supposée adiabatique [pas de transfert thermique avec l'air pendant la transformation, supposée suffisamment rapide] et monobare (se déroulant au contact de l'air, barostat à $P_{atm} = cst$), avec équilibre mécanique réalisé avec le barostat aux états initial et final.

On néglige la capacité thermique du verre (ainsi que de l'hypothétique cuillère servant à agiter le jus, afin d'homogénéiser la température) par rapport à celle du jus de fruit.

On suppose également la capacité thermique du jus de fruit liquide égale à celle de l'eau liquide, en l'absence de données supplémentaires.

③ **Estimation des paramètres de travail** : On estime $m_g = 15$ g [masse d'un glaçon moyen], $m_{jf} = 275$ g [masse d'un volume de 25 cL de jus de fruits, en supposant sa densité égale à 1.1], $T_{cong} = -20$ °C et $T_{frigo} = 5$ °C. On donne $T_{ini} = 28$ °C la température initiale du jus de fruit (il fait chaud en cette journée d'été ; thermalisation avec l'air ambiant).

④ **Schéma de la transformation**, avec N le nombre de glaçons introduits dans le verre :



⑤ **Résolution** : L'application du premier principe au système {jus de fruits + glaçons} durant la transformation considérée, avec la fonction enthalpie, donne : $\Delta H = Q + W_u = 0$ J

Par extensivité de la fonction d'état enthalpie et en considérant que la fusion des glaçons s'effectue à $T_{fus} = 0$ °C à pression atmosphérique :

$$\begin{aligned} \Delta H &= \underbrace{\Delta H_{\text{échauff glaçons}}}_{>0} + \underbrace{\Delta H_{\text{fusion glaçons}}}_{>0} + \underbrace{\Delta H_{\text{échauff eau glaçons}}}_{>0} + \underbrace{\Delta H_{\text{refroid.jus fruits}}}_{<0} \\ &= c_g N m_g (T_{fus} - T_{cong}) + N m_g \times \Delta_{fus} h(P_{atm}) + c_l N m_g (T_{frigo} - T_{fus}) + c_l m_{jf} (T_{frigo} - T_{ini}) = 0 \text{ J} \\ \Leftrightarrow N &= - \frac{m_{jf}}{m_g} \frac{c_l (T_{frigo} - T_{ini})}{c_g (T_{fus} - T_{cong}) + \Delta_{fus} h(P_{atm}) + c_l (T_{frigo} - T_{fus})} \\ \text{A. N. : } N &= - \frac{275}{15} \times \frac{4.18 \times (5 - 28)}{2.1 \times (0 - (-20)) + 3.3 \times 10^2 + 4.18 \times (5 - 0)} = \boxed{4.49} \end{aligned}$$

⑥ **Conclusion** : **4 glaçons et demi de 15 g initialement à -20 °C suffiraient, dans le cadre des hypothèses effectuées, à faire refroidir 275 g de jus de fruits initialement à 25 °C, jusqu'à 5 °C.**

Le modèle pourrait être amélioré en prenant en compte les capacités thermiques du verre (et de la cuillère), ainsi que le réchauffement du contenu du verre par transfert conducto-convectif à l'interface verre / air.