

Exercice 1 :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{3}{4}x^2 - 2x + 3$.

1. a) Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.

f est une fonction trinôme avec $a = \frac{3}{4}$, $b = -2$ et $c = 3$.

$a > 0$ et $\alpha = -\frac{b}{2a} = 2 \times \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$ donc f est strictement décroissante sur $]-\infty; \frac{4}{3}]$ et strictement croissante sur $[\frac{4}{3}; +\infty[$ avec pour minimum $f(\frac{4}{3}) = \frac{5}{3}$ (je vous laisse faire le tableau de variation).

b) En déduire, que pour tout x appartenant à l'intervalle $[\frac{4}{3}; 2]$, $f(x)$ appartient à l'intervalle $[\frac{4}{3}; 2]$.
 $[\frac{4}{3}; 2] \subset [\frac{4}{3}; +\infty[$ donc f est strictement croissante sur $[\frac{4}{3}; 2]$. Donc :

$$\frac{4}{3} \leq x \leq 2 \Rightarrow f\left(\frac{4}{3}\right) \leq f(x) \leq f(2)$$

Or $f(\frac{4}{3}) = \frac{5}{3}$ et $f(2) = \frac{3}{4} \times 4 - 2 \times 2 + 3 = 2$ donc : si $x \in [\frac{4}{3}; 2]$ alors $f(x) \in [\frac{5}{3}; 2]$.

De plus, $\frac{8}{3} > \frac{4}{3}$ donc $[\frac{5}{3}; 2] \subset [\frac{4}{3}; 2]$ donc : si $x \in [\frac{4}{3}; 2]$ alors $f(x) \in [\frac{4}{3}; 2]$.

Remarque : On dit que l'intervalle $[\frac{4}{3}; 2]$ est **stable** par la fonction f .

c) Vérifier que, pour tout réel x , on a $x \leq f(x)$.

Pour cela, on pourra démontrer que, pour tout réel x , $f(x) - x = \frac{3}{4}(x - 2)^2$.

Soit $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) - x = \frac{3}{4}x^2 - 2x + 3 - x = \frac{3}{4}x^2 - 3x + 3 = \frac{3}{4}\left(x^2 - 3 \times \frac{4}{3}x + 3 \times \frac{4}{3}\right) = \frac{3}{4}(x^2 - 4x + 4) = \frac{3}{4}(x - 2)^2$$

Ainsi, pour tout réel x , $f(x) - x = \frac{3}{4}(x - 2)^2$.

Or, pour tout réel x , $(x - 2)^2 \geq 0$ donc, pour tout réel x , $f(x) - x \geq 0$ donc $x \leq f(x)$.

Soit (u_n) la suite définie par un réel u_0 et, pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = f(u_n)$.

2. On suppose dans toute la question 2. que $\frac{4}{3} \leq u_0 < 2$.

a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $\frac{4}{3} \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 2$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On note $P(n)$: « $\frac{4}{3} \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 2$ »

• Si $n = 0$: D'une part, $u_n = u_0$ et on sait que $\frac{4}{3} \leq u_0 < 2$.

D'autre part $u_{n+1} = u_1 = f(u_0)$. Or d'après la question 1c. : $f(u_0) \geq u_0$ donc $u_1 \geq u_0$.

De plus, d'après la question 1a, comme $u_0 \in [\frac{4}{3}; 2]$ alors $f(u_0) \in [\frac{4}{3}; 2]$ donc $\frac{4}{3} \leq u_1 \leq 2$.

On déduit des trois inégalités surlignées que $\frac{4}{3} \leq u_0 \leq u_1 \leq 2$ donc que $P(0)$ est vraie.

• On suppose qu'il existe un entier naturel k tel que $P(k)$ est vraie et on veut montrer qu'alors $P(k + 1)$ est vraie :

On sait que $\frac{4}{3} \leq u_k \leq u_{k+1} \leq 2$ (HR) .

Or f est croissante sur $[\frac{4}{3}; 2]$ donc : $f(\frac{4}{3}) \leq f(u_k) \leq f(u_{k+1}) \leq f(2)$

Donc $\frac{8}{3} \leq f(u_k) \leq f(u_{k+1}) \leq 2$

Comme $\frac{4}{3} < \frac{8}{3}$ on a donc : $\frac{4}{3} \leq f(u_k) \leq f(u_{k+1}) \leq 2$. Ainsi, $P(k + 1)$ est vraie si $P(k)$ l'est.

• Conclusion : P est initialisée et héréditaire donc, pour tout entier naturel n on a $\frac{4}{3} \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 2$.

b) En déduire que la suite (u_n) est convergente.

On déduit de la question précédente que la suite (u_n) est croissante et majorée par 2 donc la suite (u_n) converge vers un réel L .

c) Déterminer la limite de la suite (u_n) .

• Pour tout entier naturel n on a $u_{n+1} = f(u_n)$ et f est une fonction polynôme donc f est continue sur $\mathbb{R}$ et donc en L .
 Donc, d'après le théorème du point fixe, on a $f(L) = L$.

• $f(L) = L \Leftrightarrow f(L) - L = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{4}(L - 2)^2 = 0$ d'après la question 1c.

Or $\frac{3}{4}(L - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow L - 2 = 0 \Leftrightarrow L = 2$.

Conclusion : La suite (u_n) converge vers 2.

3. On suppose maintenant que $u_0 = 2$. Que pouvez-vous dire de la suite (u_n) dans ce cas ?

$$\begin{aligned}\text{Si } u_0 = 2 \text{ alors } u_1 &= f(u_0) = f(2) = 2 \\ u_2 &= f(u_1) = f(2) = 2 \dots\end{aligned}$$

On peut montrer par une récurrence immédiate que, pour tout entier naturel n on a $u_n = 2$.

Conclusion : Si $u_0 = 2$ alors la suite (u_n) est constante, égale à 2.

4. (question bonus, à traiter quand toutes les autres questions du devoir l'auront été)

A l'aide d'un raisonnement par l'absurde, montrer que si $u_0 > 2$ alors la suite (u_n) n'est pas convergente. Admet-elle une limite ?

Supposons, par l'absurde, que la suite (u_n) converge vers un réel L .

Alors, on montre comme dans la question 2c que la limite de cette suite est $L = 2$.

De plus, on a vu que, pour tout réel x , on a $x \leq f(x)$ donc, pour tout entier n on a : $u_n \leq f(u_n)$ donc $u_n \leq u_{n+1}$.

Ainsi, la suite (u_n) est croissante. On en déduit que la suite (u_n) est minorée par son premier terme u_0 . Donc $L \geq u_0$.

Or $u_0 > 2$ donc $L > 2$: on aboutit à une contradiction.

Conclusion : la suite (u_n) n'est pas convergente.

(u_n) est donc une suite croissante qui ne converge pas donc elle diverge vers $+\infty$.

Exercice 2 :

On considère l'équation différentielle $(E) : y' = y + 2xe^x$.

On cherche l'ensemble des fonctions définies et dérivables sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels qui sont solutions de cette équation.

1. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^2 e^x$. Démontrer que g est une solution particulière de (E) .

g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ (la fonction carré et la fonction $\exp$).

On a, pour tout réel x : $g'(x) = 2xe^x + e^x \times x^2 = 2xe^x + x^2 e^x = 2xe^x + g(x)$.

On en déduit que la fonction g est bien une solution particulière de l'équation (E) .

2. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E) .

$(E) \Leftrightarrow y' = ay + f$ où $a = 1$ et f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2xe^x$.

Ainsi, l'ensemble des solutions de l'équation (E) est : $\{x \mapsto Ce^x + g(x), C \in \mathbb{R}\} = \{x \mapsto Ce^x + x^2 e^x, C \in \mathbb{R}\}$.

Exercice 3 :

Partie A :

L'objectif de cette partie est de résoudre l'équation différentielle $(E) : 250y' = 120y - y^2$ d'inconnue y , une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. Résoudre l'équation différentielle $(E_1) : y' + 0,48y = \frac{1}{250}$.

$$(E_1) \Leftrightarrow y' = -0,48y + \frac{1}{250} \Leftrightarrow y' = ay + b \text{ où } a = -0,48 \text{ et } b = \frac{1}{250}; -\frac{b}{a} = -\frac{1}{250} \times \left(-\frac{1}{0,48}\right) = \frac{1}{120}$$

Ainsi, l'ensemble des solutions de l'équation (E_1) est : $S_{(E_1)} = \left\{x \mapsto Ce^{-0,48x} + \frac{1}{120}, C \in \mathbb{R}\right\}$.

2. Soit g une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ qui ne s'annule jamais sur $\mathbb{R}$. On note h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$h(x) = \frac{1}{g(x)}$. On admet que h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note g' et h' les fonctions dérivées des fonctions g et h .

a) Montrer que si la fonction h est une solution de l'équation différentielle (E) alors la fonction g est une solution de l'équation différentielle (E_1) .

Si la fonction h est solution de l'équation différentielle (E) alors $250 h' = 120 h - h^2$.

$g = \frac{1}{h}$ donc :

$$g' = -\frac{h'}{h^2} = -\frac{250h'}{250h^2} = -\frac{120h - h^2}{250h^2} = -\frac{120h}{250h^2} + \frac{h^2}{250h^2} = -0,48 \times \frac{1}{h} + \frac{1}{250} = -0,48 \times g + \frac{1}{250}$$

Donc la fonction g est une solution de l'équation différentielle (E_1) .

b) On admet que, réciproquement, si la fonction g est une solution de l'équation différentielle (E_1) alors la fonction h est solution de l'équation différentielle (E) . En déduire que l'ensemble des solutions de l'équation (E) est l'ensemble des

fonctions h_m définies sur $\mathbb{R}$ par $h_m(x) = \frac{120}{1 + m e^{-0,48x}}$ où $m \in \mathbb{R}$.

h est solution de l'équation différentielle $(E) \Leftrightarrow g = \frac{1}{h}$ est solution de l'équation (E_1)

$$\Leftrightarrow \exists C \in \mathbb{R} \mid \forall x \in \mathbb{R}, g(x) = Ce^{-0,48x} + \frac{1}{120}$$

$$\Leftrightarrow \exists C \in \mathbb{R} | \forall x \in \mathbb{R}, \frac{1}{h(x)} = Ce^{-0,48x} + \frac{1}{120}$$

$$\Leftrightarrow \exists C \in \mathbb{R} | \forall x \in \mathbb{R}, h(x) = \frac{1}{Ce^{-0,48x} + \frac{1}{120}} = \frac{120}{120Ce^{-0,48x} + 1}$$

$$\Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{R} | \forall x \in \mathbb{R}, h(x) = \frac{120}{m e^{-0,48x} + 1} \text{ (en posant } m = 120C)$$

Conclusion : L'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E) est :

$$S = \left\{ x \mapsto \frac{120}{m e^{-0,48x} + 1}, m \in \mathbb{R} \right\}$$

Partie B :

On s'intéresse à présent à l'évolution d'une population de bactéries dans un milieu de culture.

À un instant $t = 0$, on introduit une population initiale de 30 000 bactéries dans le milieu.

On note $p(t)$ la quantité de bactéries, exprimée en millier d'individus, présente dans le milieu après un temps t , exprimé en heure. On a donc $p(0) = 30$.

On admet que la fonction p est une solution de l'équation différentielle (E) définie dans la partie précédente.

1. Montrer que p est définie sur $\mathbb{R}^+$ par $p(t) = \frac{120}{1 + 3e^{-0,48t}}$

p est solution de l'équation différentielle (E) donc : $\exists m \in \mathbb{R} | \forall t \in \mathbb{R}^+, p(t) = \frac{120}{m e^{-0,48t} + 1}$

De plus, $p(0) = 30$ donc : $\frac{120}{m e^{-0,48 \times 0} + 1} = 30$

$$\text{donc : } \frac{120}{m+1} = 30$$

$$\text{donc : } m + 1 = \frac{120}{30} = 4 \text{ donc } m = 3.$$

On en déduit que p est définie sur $\mathbb{R}^+$ par $p(t) = \frac{120}{1 + 3e^{-0,48t}}$.

2. a) Dresser le tableau de variation complet de la fonction p sur $[0; +\infty[$ (on attend aussi $\lim_{t \rightarrow +\infty} p(t)$).

• p est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ puisque c'est une solution de l'équation différentielle (E).

$$p = 120 \times \frac{1}{u} \text{ où } u : t \mapsto 1 + 3e^{-0,48t}$$

$$\text{Donc } p' = 120 \times \left(-\frac{u'}{u^2} \right) \quad \text{et, pour tout réel } t, u'(t) = 0 + 3 \times (-0,48)e^{-0,48t} = -1,44e^{-0,48t}$$

Donc, pour tout réel $t \geq 0$ on a

$$p'(t) = 120 \times \left(-\frac{-1,44e^{-0,48t}}{(1 + 3e^{-0,48t})^2} \right) = \frac{120 \times 1,44e^{-0,48t}}{(1 + 3e^{-0,48t})^2}$$

Pour tout réel t on a $e^{-0,48t} > 0$ et $(1 + 3e^{-0,48t})^2 > 0$ donc $p'(t) > 0$.

On en déduit que p est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.

• $\lim_{t \rightarrow +\infty} -0,48t = -\infty$. On pose $X = -0,48t$: $\lim_{X \rightarrow -\infty} e^X = 0$ donc, d'après le théorème de composition,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-0,48t} = 0.$$

On en déduit, par limite de produit puis de somme, $\lim_{t \rightarrow +\infty} 1 + 3e^{-0,48t} = 1$

Par limite de quotient, on a donc : $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{120}{1 + 3e^{-0,48t}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} p(t) = 120$.

b) Interpréter ces résultats dans le contexte de l'exercice.

Cela signifie que la population de bactéries est croissante au fil du temps et, au bout d'un grand nombre d'heures, elle se stabilisera à 120 individus.

3. a) Montrer que l'équation $p(t) = 65$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}^+$ et que $\alpha \in [2; 3]$.

• La fonction p est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ donc continue, et strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.

De plus, $p(0) = 30$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} p(t) = 120$ donc $65 \in [p(0); \lim_{t \rightarrow +\infty} p(t)]$.

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, on en déduit que l'équation $p(t) = 65$ admet une unique solution $\alpha \in \mathbb{R}^+$.

• On a $p(2) \approx 55,8$ et $p(3) \approx 70,1$ donc $p(2) \leq 65 \leq p(3)$
Donc $p(2) \leq p(\alpha) \leq p(3)$

Or p est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ donc $2 \leq \alpha \leq 3$.

b) Donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près. (On ne demande pas de justifier la réponse). $\alpha \approx 2,64$

c) Déterminer le temps nécessaire pour que la population de bactéries dépasse 65 000 individus.

• Cela revient à résoudre l'inéquation $p(t) > 65$:

$p(t) > 65 \Leftrightarrow p(t) > p(\alpha) \Leftrightarrow t > \alpha$ car la fonction p est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.

• $\alpha \approx 2,64$ h = 2h (60 × 0,64) min ≈ 2h38 min.

Conclusion : La population de bactéries dépassera 65 000 individus au bout de 2h38 minutes environ.

4. On considère les fonctions python ci-contre.

a) Compléter le tableau d'étapes suivant, permettant de suivre le fonctionnement de la fonction encadrement() pendant les premiers tours de boucle (dans la cinquième colonne du tableau, écrivez VRAI si la condition est vérifiée, et FAUX sinon).

a	b	n	c	$f(c) > 65$
2	3	0	2,5	$(f(2,5) \approx 63)$ FAUX
2,5	3	1	2,75	$(f(2,75) \approx 67)$ VRAI
2,5	2,75	2	2,625	$(f(2,625) \approx 64,8)$ FAUX
2,625	2,75	3	2,6875	VRAI

b) Expliquez le rôle de la fonction encadrement(). Les résultats du tableau sont-ils cohérents avec la question 3b ?

Le rôle de la fonction encadrement() est de déterminer, par dichotomie, un encadrement de la solution α de l'équation $f(t) = 65$ d'amplitude inférieure ou égale à 10^{-3} .

Au 3b on a obtenu $\alpha \approx 2,64$ et on a bien $2,625 < \alpha < 2,75$ (résultats obtenus dans la dernière ligne du tableau) donc les résultats du tableau sont-ils cohérents avec la question 3b .

c) Combien de tours de boucles seront effectués au total dans la fonction encadrement() ?

Soit n le nombre de tours de boucles nécessaires pour obtenir la précision attendue.

Au départ, l'encadrement de α est d'amplitude 1 et cette amplitude est divisée par 2 à chaque tour de boucle donc l'amplitude de l'encadrement obtenu après n tours de boucles est $\frac{1}{2^n}$.

$$\frac{1}{2^n} \leq 10^{-3} \Leftrightarrow 2^n \geq 10^3 \Leftrightarrow \ln(2^n) \geq \ln(10^3) \text{ car la fonction } \ln \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}^+$$

$$\Leftrightarrow n \ln(2) \geq \ln(10^3)$$

$$\Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(10^3)}{\ln(2)}$$

$$\text{Or } \frac{\ln(10^3)}{\ln(2)} \approx 9,97 \text{ donc : } \frac{1}{2^n} \leq 10^{-3} \Leftrightarrow n \geq 10$$

Il faut donc 10 tours de boucles.