

Contrôle n°6 de Mathématiques

Durée : 1h50

La calculatrice est autorisée

Le barème est donné à titre indicatif, il pourra être modifié

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

Sauf mention contraire, toutes les réponses doivent être justifiées.

Exercice 1 : (6,25 points + 1 point bonus)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{3}{4}x^2 - 2x + 3$.

1. a) Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.

b) En déduire, que pour tout x appartenant à l'intervalle $\left[\frac{4}{3}; 2\right]$, $f(x)$ appartient à l'intervalle $\left[\frac{4}{3}; 2\right]$.

c) Vérifier que, pour tout réel x , on a $x \leq f(x)$.

Pour cela, on pourra démontrer que, pour tout réel x , $f(x) - x = \frac{3}{4}(x - 2)^2$.

Soit (u_n) la suite définie par un réel u_0 et, pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = f(u_n)$.

2. On suppose dans toute la question 2. que $\frac{4}{3} \leq u_0 < 2$.

a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $\frac{4}{3} \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 2$.

b) En déduire que la suite (u_n) est convergente.

c) Déterminer la limite de la suite (u_n) .

3. On suppose maintenant que $u_0 = 2$. Que pouvez-vous dire de la suite (u_n) dans ce cas ?

4. (question bonus, à traiter quand toutes les autres questions du devoir l'auront été)

A l'aide d'un raisonnement par l'absurde, montrer que si $u_0 > 2$ alors la suite (u_n) n'est pas convergente. Admet-elle une limite ?

Exercice 2 : (1,5 points)

On considère l'équation différentielle $(E) : y' = y + 2xe^x$.

On cherche l'ensemble des fonctions définies et dérivables sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels qui sont solutions de cette équation.

1. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^2e^x$. Démontrer que g est une solution particulière de (E) .

2. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E) .

Tournez s'il vous plaît

Exercice 3 : (12,25 points)

Partie A :

L'objectif de cette partie est de résoudre l'équation différentielle (E) : $250y' = 120y - y^2$ d'inconnue y , une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. Résoudre l'équation différentielle (E_1) : $y' + 0,48y = \frac{1}{250}$.

2. Soit g une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ qui ne s'annule jamais sur $\mathbb{R}$. On note h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \frac{1}{g(x)}$. On admet que h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note g' et h' les fonctions dérivées des fonctions g et h .

a) Montrer que si la fonction h est une solution de l'équation différentielle (E) alors la fonction g est une solution de l'équation différentielle (E_1).

b) On admet que, réciproquement, si la fonction g est une solution de l'équation différentielle (E_1) alors la fonction h est solution de l'équation différentielle (E). En déduire que l'ensemble des solutions de l'équation (E) est l'ensemble des

fonctions h_m définies sur $\mathbb{R}$ par $h_m(x) = \frac{120}{1 + m e^{-0,48x}}$ où $m \in \mathbb{R}$.

Partie B :

On s'intéresse à présent à l'évolution d'une population de bactéries dans un milieu de culture.

À un instant $t = 0$, on introduit une population initiale de 30 000 bactéries dans le milieu.

On note $p(t)$ la quantité de bactéries, exprimée en millier d'individus, présente dans le milieu après un temps t , exprimé en heure. On a donc $p(0) = 30$.

On admet que la fonction p est une solution de l'équation différentielle (E) définie dans la partie précédente.

1. Montrer que p est définie sur $\mathbb{R}^+$ par $p(t) = \frac{120}{1 + 3e^{-0,48t}}$.

2. a) Dresser le tableau de variation complet de la fonction p sur $[0; +\infty[$ (on attend aussi $\lim_{t \rightarrow +\infty} p(t)$).

b) Interpréter ces résultats dans le contexte de l'exercice.

3. a) Montrer que l'équation $p(t) = 65$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}^+$ et que $\alpha \in [2; 3]$.

b) Donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près. (On ne demande pas de justifier la réponse).

c) Déterminer le temps nécessaire pour que la population de bactéries dépasse 65 000 individus.

On expliquera la démarche suivie et on donnera le résultat sous la forme d'une valeur arrondie exprimée en heures et en minutes.

4. On considère les fonctions python ci-contre.

a) Compléter le tableau d'étapes suivant, permettant de suivre le fonctionnement de la fonction encadrement() pendant les premiers tours de boucle (dans la quatrième colonne du tableau, écrivez VRAI si la condition est vérifiée, et FAUX sinon).

a	b	n	c	$f(c) > 65$
2	3	0		
		1		
		2		
		3		

```
1 from math import exp
2
3 def p(t):
4     return 120/(1+3*exp(-0.48*t))
5
6 def encadrement():
7     a=2
8     b=3
9     n=0
10    while b-a>10**(-3):
11        c=(a+b)/2
12        if p(c)>65:
13            b=c
14        else:
15            a=c
16        n=n+1
17    return a,b,n
```

b) Expliquez le rôle de la fonction encadrement(). Les résultats du tableau sont-ils cohérents avec la question 3b ?

c) Combien de tours de boucles seront effectués au total dans la fonction encadrement() ?