

Bac blanc : Correction

Partie A

1. Réponse B

$$\sqrt{32} = \sqrt{16 \times 2} = 4\sqrt{2}$$

2. Réponse B

$$1 - \frac{2 - \sqrt{3}}{2} = \frac{2 - 2 + \sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

3. Réponse D

$$\frac{1}{2 - \sqrt{5}} = \frac{(2 + \sqrt{5})}{(2 - \sqrt{5})(2 + \sqrt{5})} = \frac{2 + \sqrt{5}}{4 - 5} = -2 - \sqrt{5}$$

4. Réponse B

$$x^2 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow x - 2 = 0 \text{ don } x = 2$$

5. Réponse A

$$x^2 + 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -9, \text{ ce qui n'est pas possible dans } \mathbb{R} \text{ car } -9 < 0$$

6. Réponse C

$2x^2 - 4x - 6 = 2(x^2 - 2x - 3)$; on calcule le discriminant de $x^2 - 2x - 3$: $\Delta = 16$; on trouve deux racines : -1 et 3 donc $x^2 - 2x - 3$ se factorise en $(x + 1)(x - 3)$

Une méthode plus simple est de développer chacune des expressions proposées.

7. Réponse C

$$\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

8. Réponse A

$$\sin\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{5\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{9\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1$$

9. Réponse A

Par définition, $-1 \leq \sin(x) \leq 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

10. Réponse D

On calcule $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = OA \times OB \times \cos(\widehat{AOB}) = \sqrt{17} \times \sqrt{34} \times \cos(\widehat{AOB}) = 17\sqrt{2} \times \cos(\widehat{AOB})$

Et $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix} = -17$

Alors $17\sqrt{2} \times \cos(\widehat{AOB}) = -17$ et donc $\cos(\widehat{AOB}) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ donc $\cos(\widehat{AOB}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Ainsi, $\widehat{AOB} = \frac{3\pi}{4}$

11. Réponse C

On calcule $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

On calcule $\det(\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{CD}) = 1 \times (-1) - 3 \times 2 = -7 \neq 0$ donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ne sont pas colinéaires

On calcule $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 1 \times 2 + 3 \times (-1) = -1 \neq 0$ donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ne sont pas orthogonaux

12. Réponse A

On calcule $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$

Comme ABC est équilatéral de côté 2, on obtient $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 2 \times 2 \times \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 4 \times \frac{1}{2} = 2$

Partie B

Exercice 1 (6 points)

$$\begin{aligned} \text{a) } A &= \sin(3\pi - x) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \cos(3\pi - x) + \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \\ &\Leftrightarrow A = \sin(\pi - x + 2\pi) - \sin(x) + \cos(\pi - x + 2\pi) + \cos(x) \\ &\Leftrightarrow A = \sin(\pi - x) - \sin(x) + \cos(\pi - x) + \cos(x) \\ &\Leftrightarrow A = \sin(x) - \sin(x) - \cos(x) + \cos(x) \\ &\Leftrightarrow A = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= \sin(\pi - x) - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos(-x) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \\ &\Leftrightarrow B = \sin(x) - \sin(x) + \cos(x) + \sin(x) \\ &\Leftrightarrow B = 2 \cos(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) On simplifie } f : \\ f(x) &= \cos(\pi - x) + \sin(2x + 4\pi) \\ \text{Donc } f(x) &= -\cos(x) + \sin(2x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{On calcule } f(-x) &= -\cos(-x) + \sin(-2x) \\ \text{Donc } f(-x) &= -\cos(x) - \sin(2x) \\ \text{Donc } f(-x) &\neq f(x) \text{ et } f(-x) \neq -f(x) \\ \text{Donc } f &\text{ n'est ni paire, ni impaire.} \end{aligned}$$

Exercice 2 (2 points)

On a pour tout $x \in \mathbb{R}$ la relation suivante :

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

$$\text{Donc } \cos^2(x) = 1 - \sin^2(x)$$

$$\text{Donc } \cos^2(x) = 1 - \frac{(\sqrt{3}-2)^2}{5^2}$$

$$\Leftrightarrow \cos^2(x) = \frac{25}{25} - \frac{3 - 4\sqrt{3} + 4}{25}$$

$$\Leftrightarrow \cos^2(x) = \frac{25 - 7 + 4\sqrt{3}}{25}$$

$$\Leftrightarrow \cos^2(x) = \frac{18 + 4\sqrt{3}}{25}$$

$$\text{Et donc } \cos(x) = \frac{\sqrt{18+4\sqrt{3}}}{5} \text{ ou } \cos(x) = -\frac{\sqrt{18+4\sqrt{3}}}{5}$$

$$\text{De plus, par hypothèse, } x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right], \text{ donc } \cos(x) \geq 0$$

$$\text{D'où } \cos(x) = \frac{\sqrt{18+4\sqrt{3}}}{5}$$

Exercise 3 (5 points)

- $u_{n+1} = 3(n+1)^2 + 5(n+1) - 1$

$$\Leftrightarrow u_{n+1} = 3n^2 + 6n + 3 + 5n + 5 - 1$$

$$\Leftrightarrow u_{n+1} = 3n^2 + 11n + 7$$

- $u_n + 1 = 3n^2 + 5n - 1 + 1$

$$\Leftrightarrow u_n + 1 = 3n^2 + 5n$$

- $u_{n-1} = 3(n-1)^2 + 5(n-1) - 1$

$$\Leftrightarrow u_{n-1} = 3n^2 - 6n + 3 + 5n - 5 - 1$$

$$\Leftrightarrow u_{n-1} = 3n^2 - n - 3$$

- $u_{2n} = 3(2n)^2 + 5 \times 2n - 1$

$$\Leftrightarrow u_{2n} = 12n^2 + 10n - 1$$

Exercise 4 (3 points)

a) $u_1 = \frac{2u_0+3v_0}{5}$
 $\Leftrightarrow u_1 = \frac{2 \times 8 + 3 \times 15}{5}$
 $\Leftrightarrow u_1 = \frac{61}{5}$

$$v_1 = \frac{3u_0 + 2v_0}{5}$$
$$\Leftrightarrow v_1 = \frac{3 \times 8 + 2 \times 15}{5}$$
$$\Leftrightarrow v_1 = \frac{54}{5}$$

Alors $u_2 = \frac{2u_1+3v_1}{5}$

$$\Leftrightarrow u_2 = \frac{2 \times \frac{61}{5} + 3 \times \frac{54}{5}}{5}$$

$$\Leftrightarrow u_2 = \frac{284}{25}$$

$$v_2 = \frac{3u_1 + 2v_1}{5}$$

$$\Leftrightarrow v_2 = \frac{3 \times \frac{61}{5} + 2 \times \frac{54}{5}}{5}$$

$$\Leftrightarrow v_2 = \frac{291}{25}$$

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on calcule $w_{n+1} = u_{n+1} + v_{n+1}$

$$\text{Donc } w_{n+1} - w_n = \frac{2u_n+3v_n}{5} + \frac{3u_n+2v_n}{5} - (u_n + v_n)$$

$$\Leftrightarrow w_{n+1} - w_n = \frac{2u_n + 3v_n + 3u_n + 2v_n - 5(u_n + v_n)}{5}$$

$$\Leftrightarrow w_{n+1} - w_n = 0$$

On en déduit que la suite (w_n) est constante.

Exercice 5 (4 points)

a) On calcule pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = \frac{2(n+1)+3}{(n+1)+1} - \frac{2n+3}{n+1}$

$$\Leftrightarrow u_{n+1} - u_n = \frac{2n+5}{n+2} - \frac{2n+3}{n+1}$$

$$\Leftrightarrow u_{n+1} - u_n = \frac{(2n+5)(n+1) - (2n+3)(n+2)}{(n+1)(n+2)}$$

$$\Leftrightarrow u_{n+1} - u_n = \frac{2n^2 + 2n + 5n + 5 - (2n^2 + 4n + 3n + 6)}{(n+1)(n+2)}$$

$$\Leftrightarrow u_{n+1} - u_n = \frac{-1}{(n+1)(n+2)}$$

Or, par définition $n \in \mathbb{N}$, donc $n \geq 0$ et donc $n+1 > 0$ et $n+2 > 0$

On en déduit que $u_{n+1} - u_n < 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

Et donc la suite (u_n) est strictement décroissante.

b) Def seuil(a) :

n=0

While $(2*n+3)/(n+1) > a$

n=n+1

return n

Exercice 6 (4 points)

a) On calcule $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \end{pmatrix}$

Alors $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -4 \times -6 + 4 \times -2$

Donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 16$

b) On calcule également $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{ABC})$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \sqrt{(-4)^2 + (4)^2} \times \sqrt{(-6)^2 + (-2)^2} \times \cos(\widehat{ABC})$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 4\sqrt{2} \times 2\sqrt{10} \times \cos(\widehat{ABC})$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 16\sqrt{5} \times \cos(\widehat{ABC})$$

Avec le résultat de la question a), on obtient $16\sqrt{5} \times \cos(\widehat{ABC}) = 16$

Et donc $\cos(\widehat{ABC}) = \frac{1}{\sqrt{5}}$

Donc $\cos(\widehat{ABC}) = \frac{\sqrt{5}}{5}$

Exercice 7 (4 points)

a) $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC}$

Or, D est le projeté orthogonal de C sur (AD) donc $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CA} = -AD \times AD$

De plus, $AD = BC = 8$

Donc $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CA} = -64$

b) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BE} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) \cdot (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AE})$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AE}$$

Or, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AE}$ sont orthogonaux, de même que $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BA}$

Et $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AE}$ sont colinéaires et de même sens

Alors $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BE} = -AB^2 + 0 + 0 + BC \times AE$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BE} = -16 + 8 \times 5$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BE} = 24$$