

On note f la fonction définie sur l'intervalle $]0, 5; +\infty[$ par $f(x) = \frac{9x-8}{2x-1}$.

On admet que la fonction f est strictement croissante sur $]\frac{1}{2}; +\infty[$.

Les questions 1) et 2) sont indépendantes.

1) Soit (u_n) la suite définie à partir du rang 1 par $u_n = f(n)$. Montrer que (u_n) est majorée par 5.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$:

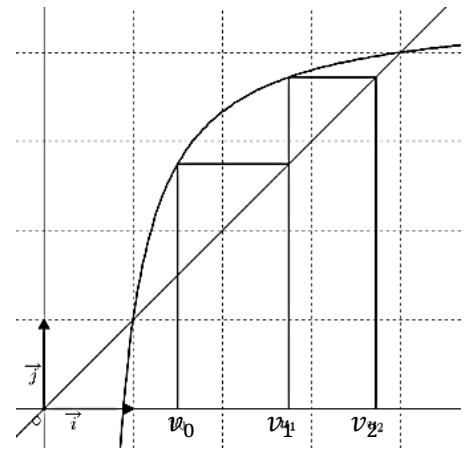
$$u_n - 5 = \frac{9n-8}{2n-1} - 5 = \frac{9n-8-5(2n-1)}{2n-1} = \frac{9n-8-10n+5}{2n-1} = \frac{-n-3}{2n-1}$$

$$n \geq 1 \text{ donc } 2n-1 \geq 1 > 0 \quad \text{et} \quad -n-3 < 0$$

Conclusion : Pour tout entier $n \geq 1$, $u_n - 5 < 0$ donc $u_n < 5$. La suite (u_n) est donc majorée par 5.

2) Soit (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $v_0 = 1,5$ et, pour tout entier naturel n , $v_{n+1} = f(v_n)$.

On a tracé sur le graphique ci-contre la représentation graphique de f sur l'intervalle $]\frac{1}{2}; +\infty[$.



a) voir graphique

b) Soit $n \in \mathbb{N}$. On note $P(n)$: « $1,5 \leq v_n \leq v_{n+1} \leq 4$ »

• Si $n = 0$:

D'une part $v_n = v_0 = 1,5$

D'autre part $v_{n+1} = v_1 = f(v_0) = f(1,5) = 2,75$

donc $1,5 \leq v_0 \leq v_1 \leq 4$ et $P(0)$ est vraie.

• On suppose qu'il existe un entier naturel k tel que $P(k)$ est vraie (ie $1,5 \leq v_k \leq v_{k+1} \leq 4$).

On veut montrer qu'alors $P(k+1)$ est vraie (ie $1,5 \leq v_{k+1} \leq v_{k+2} \leq 4$).

D'après l'hypothèse de récurrence, $1,5 \leq v_k \leq v_{k+1} \leq 4$.

Et, par définition de la suite (u_n) , $v_{k+1} = f(v_k)$ et $v_{k+2} = f(v_{k+1})$.

Or la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $]0,5; +\infty[$ donc :

$$1,5 \leq v_k \leq v_{k+1} \leq 4 \Rightarrow f(1,5) \leq f(v_k) \leq f(v_{k+1}) \leq f(4)$$

$$\text{Donc : } 2,75 \leq v_{k+1} \leq v_{k+2} \leq 4$$

De plus, $1,5 < 2,75$ donc $1,5 \leq v_{k+1} \leq v_{k+2} \leq 4$.

Donc $P(k+1)$ est vraie si $P(k)$ l'est.

• Conclusion : $P(0)$ est vraie et P est héréditaire donc, pour tout entier naturel n , $1,5 \leq v_n \leq v_{n+1} \leq 4$.

c) On déduit de la question précédente que la suite est croissante et bornée par 1,5 et 4, ce qui est cohérent avec les termes construits sur l'axe des abscisses. En effet, on observe que $1,5 < v_0 < v_1 < v_2 < v_3 \leq 4$.