

Équations de droites et de cercles

SPÉCIALITÉ MATHÉMATIQUES — Première

CORRIGÉ

1 Équation de droite et vecteur directeur

Exercice 1

Rappel : pour une droite d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$, un vecteur directeur est $\vec{u}(-b; a)$ et un vecteur normal est $\vec{n}(a; b)$.

1. SOLUTION.

a. $(E_1) : 2y + 3 = 0 \iff y = -\frac{3}{2}$. Droite horizontale.

- Intersection avec $(Oy) : (0; -\frac{3}{2})$.
- Pas d'intersection avec (Ox) (parallèle à cet axe).
- Vecteur directeur : $\vec{u}(1; 0)$.

b. $(E_2) : 2x + 3 = 0 \iff x = -\frac{3}{2}$. Droite verticale.

- Intersection avec $(Ox) : (-\frac{3}{2}; 0)$.
- Pas d'intersection avec (Oy) .
- Vecteur directeur : $\vec{u}(0; 1)$.

c. $(E_3) : 2x - 3y = 0$. Ici $a = 2, b = -3, c = 0$, donc la droite passe par O .

- Intersection avec les deux axes : $(0; 0)$.
- Vecteur directeur : $\vec{u}(-b; a) = (3; 2)$.

d. $(E_4) : 2x - 3y + 1 = 0$.

- $x = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{3}$: intersection avec (Oy) en $(0; \frac{1}{3})$.
- $y = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$: intersection avec (Ox) en $(-\frac{1}{2}; 0)$.
- Vecteur directeur : $\vec{u}(3; 2)$.

■

2. Droite Δ_1 : point $A(-4; 5)$, vecteur directeur $\vec{u}(3; 6)$.

SOLUTION. Un vecteur normal est $\vec{n}(6; -3)$, donc Δ_1 admet une équation de la forme $6x - 3y + c = 0$, soit après simplification : $2x - y + c = 0$.

$A \in \Delta_1$ donne $2(-4) - 5 + c = 0$, d'où $c = 13$.

$$\Delta_1 : 2x - y + 13 = 0$$

■

3. Droite Δ_2 passant par $A(-4; 5)$ et $C(2; 12)$.

SOLUTION. $\overrightarrow{AC} = (6; 7)$ dirige Δ_2 , donc un vecteur normal est $(7; -6)$: équation de la forme $7x - 6y + c = 0$.

$A \in \Delta_2 : 7(-4) - 6(5) + c = 0 \iff c = 58$.

$$\Delta_2 : 7x - 6y + 58 = 0$$

Vérification avec $C : 7(2) - 6(12) + 58 = 14 - 72 + 58 = 0$. ✓ ■

4. Droite Δ_3 passant par $D(-3; -2)$ et parallèle à Δ_2 .

SOLUTION. Δ_3 a même direction que Δ_2 , donc une équation du type $7x - 6y + c = 0$.

$D \in \Delta_3 : 7(-3) - 6(-2) + c = 0 \iff c = 9$.

$$\Delta_3 : 7x - 6y + 9 = 0$$

■

2 Équation de droite et vecteur normal

Exercice 2

1. *SOLUTION.* Pour une droite d'équation $ax + by + c = 0$, un vecteur normal est $\vec{n}(a; b)$.

a. $(E_1) : 2y + 3 = 0$, soit $0 \cdot x + 2y + 3 = 0 : \vec{n}(0; 2)$.

b. $(E_2) : 2x + 3 = 0 : \vec{n}(2; 0)$.

c. $(E_3) : 2x - 3y = 0 : \vec{n}(2; -3)$.

d. $(E_4) : 2x - 3y + 1 = 0 : \vec{n}(2; -3)$.

■

2. Droite Δ_4 : point $A(-4; 5)$, vecteur normal $\vec{n}(3; 6)$.

SOLUTION. Δ_4 admet une équation de la forme $3x + 6y + c = 0$, soit après simplification $x + 2y + c' = 0$.

$$A \in \Delta_4 : -4 + 2(5) + c' = 0 \iff c' = -6.$$

$$\Delta_4 : x + 2y - 6 = 0$$

■

3. Droite Δ_5 : point $A(-4; 5)$, perpendiculaire à (AC) avec $C(2; 12)$.

SOLUTION. $\Delta_5 \perp (AC)$ signifie que $\vec{AC} = (6; 7)$ est un vecteur normal à Δ_5 . Équation : $6x + 7y + c = 0$.

$$A \in \Delta_5 : 6(-4) + 7(5) + c = 0 \iff c = -11.$$

$$\Delta_5 : 6x + 7y - 11 = 0$$

■

3 Équation de hauteur ou de médiatrice

Exercice 3

$A(-3; 1)$, $B(7; 5)$, $D(3; -4)$.

1. Équation de (AB) .

SOLUTION. $\vec{AB} = (10; 4)$ dirige (AB) ; on peut prendre $\vec{u}(5; 2)$. Un vecteur normal est alors $(2; -5)$, d'où une équation $2x - 5y + c = 0$.

$$A \in (AB) : 2(-3) - 5(1) + c = 0 \iff c = 11.$$

$$(AB) : 2x - 5y + 11 = 0$$

Vérification avec B : $14 - 25 + 11 = 0$. ✓ ■

2. a. Hauteur issue de D dans ABD .

SOLUTION. Cette hauteur est perpendiculaire à (AB) et passe par D :
 $\overrightarrow{AB} = (10; 4)$ ou $(5; 2)$ en est un vecteur normal. Équation : $5x + 2y + c = 0$.
 $D(3; -4)$ sur la hauteur : $15 - 8 + c = 0 \iff c = -7$.

$$h_D : 5x + 2y - 7 = 0$$

■

- b. Projeté orthogonal H de D sur (AB) .

SOLUTION. H est l'intersection de (AB) et de la hauteur h_D :

$$\begin{cases} 2x - 5y + 11 = 0 \\ 5x + 2y - 7 = 0 \end{cases}$$

$L_1 \times 2 + L_2 \times 5 : 4x - 10y + 22 + 25x + 10y - 35 = 0 \iff 29x = 13$, donc
 $x = \frac{13}{29}$.

En réinjectant : $5 \cdot \frac{13}{29} + 2y - 7 = 0 \iff 2y = 7 - \frac{65}{29} = \frac{138}{29}$, d'où $y = \frac{69}{29}$.

$$H\left(\frac{13}{29}; \frac{69}{29}\right)$$

■

- c. Aire du triangle ADB .

SOLUTION. **Méthode 1** — formule classique :

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} AB \times DH.$$

Avec $AB = \sqrt{10^2 + 4^2} = 2\sqrt{29}$ et

$$DH = \sqrt{\left(\frac{13}{29} - 3\right)^2 + \left(\frac{69}{29} + 4\right)^2} = \sqrt{\frac{74^2 + 185^2}{29^2}} = \sqrt{\frac{37^2(4+25)}{29^2}} = \frac{37}{\sqrt{29}},$$

on obtient $\mathcal{A} = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{29} \cdot \frac{37}{\sqrt{29}} = 37$.

Méthode 2 — déterminant (plus rapide) : avec $\overrightarrow{AB}(10; 4)$ et $\overrightarrow{AD}(6; -5)$,

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} |\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})| = \frac{1}{2} |10 \cdot (-5) - 4 \cdot 6| = \frac{1}{2} \cdot 74.$$

$$\mathcal{A}_{ADB} = 37$$

■

3. a. Milieu I de $[AB]$.

SOLUTION.

$$I\left(\frac{-3+7}{2}; \frac{1+5}{2}\right) = \boxed{I(2; 3)}.$$

■

- b. Médiatrice de $[AB]$.

SOLUTION. La médiatrice de $[AB]$ passe par I et est perpendiculaire à (AB) :

$\overrightarrow{AB}$, ou $(5; 2)$, en est un vecteur normal. Équation : $5x + 2y + c = 0$.

$I(2; 3)$ sur la médiatrice : $10 + 6 + c = 0 \iff c = -16$.

$$\boxed{\text{méd}([AB]) : 5x + 2y - 16 = 0}$$

■

4 Équation de cercle, position relative de droite et de cercle

Exercice 4

1. a. Équation du cercle Γ_1 de centre $S(-1; 3)$ et de rayon 5.

SOLUTION.

$$\Gamma_1 : (x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 25$$

■

- b. Le point $K(3; 0)$ appartient-il à Γ_1 ?

SOLUTION. $(3 + 1)^2 + (0 - 3)^2 = 16 + 9 = 25$. Donc $K \in \Gamma_1$. ■

- c. La droite $\Delta_6 : y = \frac{4}{3}x - 4$ est-elle tangente à Γ_1 en K ?

SOLUTION. **Étape 1** — vérifier $K \in \Delta_6 : \frac{4}{3} \cdot 3 - 4 = 0$. ✓

Étape 2 — comparer $\overrightarrow{SK}$ et la direction de Δ_6 . La droite Δ_6 a pour vecteur directeur $\vec{u}(3; 4)$ (coefficient directeur $\frac{4}{3}$). Or $\overrightarrow{SK} = (4; -3)$, et

$$\overrightarrow{SK} \cdot \vec{u} = 4 \cdot 3 + (-3) \cdot 4 = 0.$$

Donc $\overrightarrow{SK} \perp \Delta_6$ en K : Δ_6 est tangente à Γ_1 en K . ■

- d. Intersection de $\Delta_7 : -x + 2y = -3$ avec Γ_1 .

SOLUTION. Δ_7 donne $x = 2y + 3$. On substitue dans Γ_1 :

$$(2y + 3 + 1)^2 + (y - 3)^2 = 25 \iff (2y + 4)^2 + (y - 3)^2 = 25.$$

On développe : $4y^2 + 16y + 16 + y^2 - 6y + 9 = 25$, soit $5y^2 + 10y = 0$, i.e. $5y(y + 2) = 0$.

D'où $y = 0$ (et $x = 3$) ou $y = -2$ (et $x = -1$).

$$\Delta_7 \cap \Gamma_1 = \{ K(3; 0), L(-1; -2) \}$$

Δ_7 est donc sécante à Γ_1 en deux points. ■

2. a. $\Gamma_2 : (x - 7)^2 + (y - 3)^2 = 7$.

SOLUTION. Par identification avec la forme $(x - x_T)^2 + (y - y_T)^2 = r^2$:

centre $T(7; 3)$, rayon $r = \sqrt{7}$
--

■

b. Les cercles Γ_1 et Γ_2 sont-ils sécants ?

SOLUTION. Deux cercles de centres S, T et de rayons r_1, r_2 sont sécants si et seulement si

$$|r_1 - r_2| < ST < r_1 + r_2.$$

Ici $S(-1; 3)$ et $T(7; 3)$ ont même ordonnée, donc $ST = 7 - (-1) = 8$.

Par ailleurs $r_1 + r_2 = 5 + \sqrt{7}$. Comme $\sqrt{7} < \sqrt{9} = 3$, on a $r_1 + r_2 < 8 = ST$.

Donc $ST > r_1 + r_2$:

Γ_1 et Γ_2 ne sont pas sécants
--

 — ils sont extérieurs l'un à l'autre. ■