

Correction — Épreuve anticipée de mathématiques — entraînement 2

Automatismes

- 1) d) $\frac{17}{12}$ 2) a) $\{-2; -1\}$ 3) b) 4 4) a) $2x(x-3)$
5) b) 42,50 € 6) c) $[1; 3]$ 7) a) $\frac{3}{2x}$ 8) a) $2x-4$
9) b) 0,42 10) b) $\frac{1}{8}$ 11) d) $3x^2 - 10x - 8$ 12) a) 0,3

1) $\frac{3}{4} + \frac{2}{3} = \frac{9}{12} + \frac{8}{12} = \frac{17}{12}$

2) $(2x+3)^2 = 1 \Leftrightarrow 2x+3 = \pm 1$

| $2x+3 = 1 \Rightarrow x = -1$ et $2x+3 = -1 \Rightarrow x = -2 \rightarrow S = \{-2; -1\}$

3) $f(A) = -10 \Rightarrow -3x+2 = -10 \Rightarrow -3x = -12 \Rightarrow x = 4$

4) $2x^2 - 6x = 2x \cdot x - 2x \cdot 3 = 2x(x-3)$

5) $50 \times (1 - 0,15) = 50 \times 0,85 = 42,50 \text{ €}$

6) La courbe passe par $(0; 3)$ (piège : $f(0) = 3 > 0$, donc f n'est pas négative avant 0). Les racines sont $x = 1$ et $x = 3$. La courbe est en dessous de l'axe uniquement sur $[1; 3]$.

7) $\frac{1}{x} + \frac{1}{2x} = \frac{2}{2x} + \frac{1}{2x} = \frac{3}{2x}$

8) $f(x) = x^2 - 4x + 1 \Rightarrow f'(x) = 2x - 4$

9) A et B indépendants $\Rightarrow P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = 0,6 \times 0,7 = 0,42$

10) $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$

11) $(3x+2)(x-4) = 3x^2 - 12x + 2x - 8 = 3x^2 - 10x - 8$

12) A et B indépendants $\Rightarrow P_A(\bar{B}) = P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0,7 = 0,3$

Exercice 1

$$f(x) = 2e^{-4x}$$

1a) **Signe de $f(x)$**

| $e^{-4x} > 0$ pour tout réel x , et $2 > 0$, donc $f(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

1b) **Variations**

| $f'(x) = 2 \times (-4)e^{-4x} = -8e^{-4x}$. Comme $e^{-4x} > 0$, on a $f'(x) < 0$ pour tout x .

f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$, de $+\infty$ vers 0^+ .

1c) Tangente en $x = 0$

$$f(0) = 2e^0 = 2 ; f'(0) = -8e^0 = -8$$

$$\text{Équation : } y = f'(0)(x - 0) + f(0)$$

$$y = -8x + 2$$

1d) Suite (y_n)

$$y_n = f(n) = 2e^{-4n}, \text{ donc } y_0 = 2e^0 = 2.$$

$$\frac{y_{n+1}}{y_n} = \frac{2e^{-4(n+1)}}{2e^{-4n}} = e^{-4n-4} \cdot e^{4n} = e^{-4} \text{ (constante)}$$

(y_n) est géométrique de premier terme $y_0 = 2$ et de raison $q = e^{-4}$.

$$g(x) = (x - 1)f(x) = 2(x - 1)e^{-4x}$$

2a) Intersections avec les axes

$$\text{Axe des ordonnées } (x = 0) : g(0) = 2(0 - 1)e^0 = -2 \rightarrow \text{point } (0 ; -2)$$

$$\text{Axe des abscisses } (g(x) = 0) : 2(x - 1)e^{-4x} = 0. \text{ Or } e^{-4x} \neq 0, \text{ donc } x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \rightarrow \text{point } (1 ; 0)$$

2b) Position par rapport à l'axe des abscisses

$$\text{Signe de } g(x) = 2(x - 1)e^{-4x} : \text{ comme } e^{-4x} > 0, \text{ le signe de } g \text{ est celui de } (x - 1).$$

$$g(x) < 0 \text{ pour } x < 1, g(1) = 0, g(x) > 0 \text{ pour } x > 1.$$

$$\mathcal{H} \text{ est en dessous de l'axe des } x \text{ sur }] - \infty ; 1[\text{ et au-dessus sur }]1 ; +\infty[.$$

2c) Calcul de $g'(x)$

$$\text{Règle du produit avec } u = x - 1, v = 2e^{-4x} :$$

$$u' = 1, v' = -8e^{-4x}$$

$$g'(x) = 1 \cdot 2e^{-4x} + (x - 1) \cdot (-8e^{-4x}) = 2e^{-4x} [1 - 4(x - 1)] = 2e^{-4x} (5 - 4x)$$

$$g'(x) = (5 - 4x)f(x) \quad \checkmark$$

2d) Tableau de variations de g

$$g'(x) = (5 - 4x) \cdot 2e^{-4x}. \text{ Comme } e^{-4x} > 0, \text{ le signe de } g' \text{ est celui de } (5 - 4x).$$

$$5 - 4x = 0 \Rightarrow x = \frac{5}{4}$$

$$g\left(\frac{5}{4}\right) = 2\left(\frac{5}{4} - 1\right) e^{-5} = \frac{1}{2}e^{-5}$$

x	$-\infty$		$\frac{5}{4}$		$+\infty$
$g'(x)$		+	0	-	
$g(x)$			$\frac{e^{-5}}{2}$		

Exercice 2

$$C_0 = 4000, C_{n+1} = 1,06 C_n - 120$$

1)

$$C_1 = 1,06 \times 4000 - 120 = 4240 - 120 = 4120$$

$C_1 = 4120$ € : c'est le capital disponible à la fin de la 1ère année après intérêts et frais de gestion.

2) Justification de $C_{n+1} = 1,06 C_n - 120$

À la fin de l'année $n + 1$: le capital C_n génère 6 % d'intérêts, puis on soustrait les 120 € de frais :

$$C_{n+1} = C_n + 0,06 C_n - 120 = 1,06 C_n - 120$$

3) (u_n) suite géométrique

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= C_{n+1} - 2000 = 1,06 C_n - 120 - 2000 = 1,06 C_n - 2120 \\ &= 1,06 (C_n - 2000) = 1,06 u_n \end{aligned}$$

(u_n) est géométrique de raison $q = 1,06$ et de premier terme $u_0 = C_0 - 2000 = 2000$.

4a)

$$u_n = u_0 \times q^n = 2000 \times 1,06^n$$

4b)

$$C_n = u_n + 2000$$

$$C_n = 2000 \times 1,06^n + 2000$$

5) Fermeture du compte

Le compte est fermé quand $C_n \geq 10\,000$ (objectif atteint) ou $n = 20$ (durée maximale).

D'après la table, $C_{20} \approx 8\,414 < 10\,000$: l'objectif de 10 000 € n'est jamais atteint en 20 ans.

On peut le vérifier : $C_n \geq 10\,000 \Leftrightarrow 2000 \times 1,06^n \geq 8000 \Leftrightarrow 1,06^n \geq 4$.

Or $1,06^{20} \approx 3,207 < 4$, donc la condition n'est jamais atteinte avant 20 ans.

Le compte d'Ana sera fermé au bout de 20 ans (durée maximale atteinte).