

CORRECTION DU BAC BLANC DE MATHÉMATIQUES N°1**Exercice n°1 : 5 points****Probabilités conditionnelles – Suites numériques**

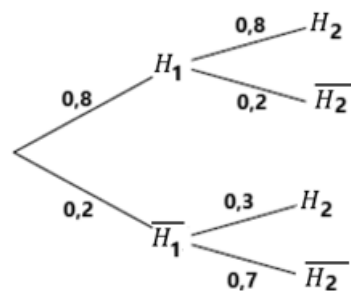
En France, les étudiants mangent très souvent à l'extérieur de leur établissement scolaire le midi. Ils choisissent généralement chaque midi entre un hamburger ou une salade pour leur déjeuner. On cherche à modéliser l'évolution de leur choix dans le temps.

On observe que :

- Si un élève a choisi un **hamburger** un jour, la probabilité qu'il reprenne un **hamburger** le lendemain est **0,8**.
- Si une personne a choisi une **salade** un jour, la probabilité qu'il prenne un **hamburger** le lendemain est 0,3.

On appelle H_n l'événement « l'élève choisit un hamburger le n -ième jour » pour $n \in \mathbb{N}$. On note p_n la probabilité de l'événement H_n et on considère que $p_0 = 1$.

1. On peut modéliser la situation grâce à l'arbre pondéré ci-dessous :



$$p_1 = P_{H_0}(H_1) = 0,8.$$

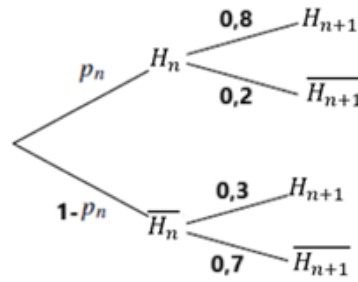
H_1 et $\overline{H_1}$ forment une partition de Ω . D'après la formule des probabilités totales, on a :

$$p_2 = P(H_2) = P(H_1 \cap H_2) + P(\overline{H_1} \cap H_2)$$

$$P(H_2) = 0,8 \times 0,8 + 0,2 \times 0,3 = 0,70$$

Donc $p_2 = 0,7$.

2. L'arbre pondéré complété est :



3. Soit $n \in \mathbb{N}$,

H_n et $\overline{H_n}$ forment une partition de l'univers. Donc d'après la formule des probabilités totales, on a :

$$\begin{aligned}
 p_{n+1} &= P(H_{n+1}) = P(H_n \cap H_{n+1}) + P(\overline{H_n} \cap H_{n+1}) \\
 &\Leftrightarrow p_{n+1} = 0,8 \times p_n + (1 - p_n) \times 0,3 \\
 &\Leftrightarrow p_{n+1} = 0,8p_n + 0,3 - 0,3p_n \\
 &\Leftrightarrow p_{n+1} = 0,5p_n + 0,3
 \end{aligned}$$

4. a) On pose $Q_n : \ll p_n \geq 0,6 \gg$.

Initialisation : Montrons que Q_0 est vraie.

$p_0 = 1 \geq 0,6$ donc Q_0 est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que Q_n est vraie c'est-à-dire $p_n \geq 0,6$.

Montrons que Q_{n+1} est vraie c'est-à-dire $p_{n+1} \geq 0,6$.

Par hypothèse de récurrence, $p_n \geq 0,6$

$$\begin{aligned}
 &\Leftrightarrow 0,5p_n \geq 0,3 \\
 &\Leftrightarrow 0,5p_n + 0,3 \geq 0,6 \\
 &\Leftrightarrow p_{n+1} \geq 0,6
 \end{aligned}$$

Donc Q_{n+1} est vraie.

Conclusion : Q_0 est vraie et Q_n est héréditaire donc d'après le principe de récurrence,

Q_n est vraie pour tout entier naturel n .

b) Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$p_{n+1} - p_n = 0,5p_n + 0,3 - p_n = -0,5p_n + 0,3$$

Or, d'après 4.a) on a, pour tout entier naturel n , $p_n \geq 0,6$.

$$\begin{aligned}
 &\Leftrightarrow -0,5p_n \leq -0,3 \\
 &\Leftrightarrow -0,5p_n + 0,3 \leq 0 \\
 &\Leftrightarrow p_{n+1} - p_n \leq 0
 \end{aligned}$$

Donc la suite (p_n) est décroissante.

c) (p_n) est décroissante et minorée donc d'après le théorème de convergence monotone, (p_n) converge.

5. On définit dans cette question la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par

$$u_n = p_n - 0,6$$

a) Soit $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = p_{n+1} - 0,6$

$$\Leftrightarrow u_{n+1} = 0,5p_n + 0,3 - 0,6$$

$$\Leftrightarrow u_{n+1} = 0,5p_n - 0,3$$

$$\Leftrightarrow u_{n+1} = 0,5(p_n - 0,6)$$

$$\Leftrightarrow u_{n+1} = 0,5u_n$$

Donc (u_n) est géométrique de raison 0,5

Son de premier terme est $u_0 = p_0 - 0,6 = 1 - 0,6 = 0,4$

b) (u_n) est géométrique de raison 0,5 et de premier terme $u_0 = 0,4$ donc pour tout entier naturel n , on :

$$u_n = u_0 \times q^n = 0,4 \times 0,5^n$$

Or, pour tout entier naturel n ,

$$u_n = p_n - 0,6 \Leftrightarrow p_n = u_n + 0,6 \Leftrightarrow p_n = 0,4 \times 0,5^n + 0,6$$

c) $-1 < 0,5 < 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,5^n = 0$ donc par somme et par produit, $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = 0,6$.

Sur le long terme, la probabilité qu'un élève mange un hamburger est égale à 0,6.

Exercice n°2 : 5 points

Probabilités conditionnelles – Loi Binomiale

Une entreprise de marketing a étudié la satisfaction des utilisateurs concernant une application mobile de réseau social. Les utilisateurs peuvent s'inscrire de deux manières : soit via leur adresse e-mail, soit via leur compte Apple.

Les utilisateurs inscrits via leur adresse e-mail représentant 70% des inscriptions, tandis que ceux inscrits via Apple représentent 30% des inscriptions.

Une enquête montre que :

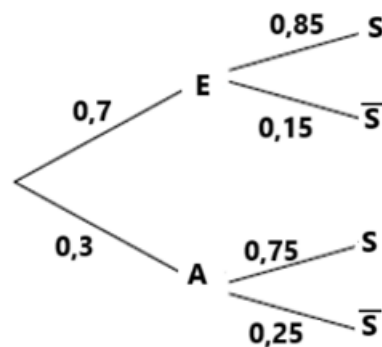
- Parmi les utilisateurs ayant réalisé leur inscription par e-mail, 85% d'entre eux sont satisfaits.
- Parmi les utilisateurs ayant réalisé leur inscription par Apple, 25% ne sont pas satisfaits.

On choisit au hasard un utilisateur inscrit sur l'application mobile et on définit les événements suivants :

- E : « L'utilisateur s'est inscrit via son adresse e-mail ».
- A : « L'utilisateur s'est inscrit via son compte Apple ».
- S : « L'utilisateur est satisfait de l'application mobile ».

On note $\bar{S}$ l'évènement contraire de l'évènement S .

1. L'arbre de probabilité est :



2. $P(E \cap S) = P(E) \times P_E(S) = 0,7 \times 0,85 = 0,595$

La probabilité qu'un utilisateur s'est inscrit via son adresse e-mail et qui est satisfait de l'application est égale à 0,595.

3. E et A forment une partition de Ω donc d'après la formule des probabilités totales, on

a : $P(S) = P(E \cap S) + P(A \cap S)$

$$P(S) = 0,595 + 0,3 \times 0,75$$

$$P(S) = 0,82$$

4. $P_A(S) = 0,75 > 0,25$

Donc le manager d'Apple a raison.

5. a) On répète de manière identique et indépendante l'expérience de Bernoulli qui consiste à poser une question à un utilisateur sur sa satisfaction et dont le succès S est « la personne est satisfaite ».

Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de succès.

Ainsi X suit une loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0,82$.

b) $P[X = 80] = \binom{100}{80} \times 0,82^{80} \times (1 - 0,82)^{20} \approx 0,087.$

6. $\mathbb{E}[X] = np = 100 \times 0,82 = 82.$ En moyenne, sur un échantillon de 100 personnes, 82 sont satisfaites.

7. Soit Y une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}$ et $p = 0,82$.
On cherche la plus petite valeur de $n \in \mathbb{N}$ telle que $P[X \geq 1] \geq 0,99$.

$$\Leftrightarrow 1 - P[X = 0] \geq 0,99$$

$$\Leftrightarrow 1 - \binom{n}{0} \times 0,82^0 \times 0,18^n \geq 0,99$$

$$\Leftrightarrow 1 - 0,18^n \geq 0,99$$

$$\Leftrightarrow -0,18^n \geq -0,01$$

$$\Leftrightarrow 0,18^n \leq 0,01$$

$$\Leftrightarrow \ln(0,18^n) \leq \ln(0,01) \text{ car la fonction logarithme népérien est croissante sur } \mathbb{R}_+^*.$$

$$\Leftrightarrow n \ln(0,18) \leq \ln(0,01) \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,18)} \Leftrightarrow n \geq 3$$

La taille minimale de l'échantillon doit être de 3.

Exercice n°3 : 5 points

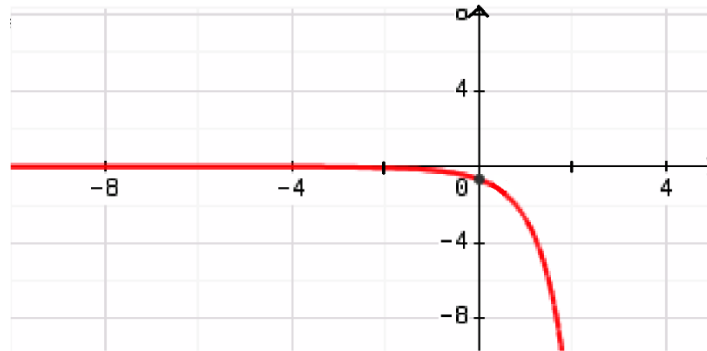
Fonction exponentielle – Continuité – Convexité – Limites de fonction – Dérivation

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $] -\infty; 3[$ par :

$$f(x) = \frac{2e^x}{x-3}$$

On admet dans cet exercice que la fonction f est dérivable sur $] -\infty; 3[$.

On a représenté ci-dessous C_f la courbe représentative de la fonction f .



1. La fonction semble concave sur $] -\infty; 3[$.

2. $\lim_{x \rightarrow 3^-} x - 3 = 0^-$ et $\lim_{x \rightarrow 3^-} 2e^x = 2e^3$ donc par quotient :

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = -\infty$$

3. a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x - 3 = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2e^x = 0$ donc par quotient :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

b) La droite d'équation $y = 0$ est une asymptote horizontale à C_f en $-\infty$.

4. Pour tout réel $x \in] -\infty; 3[$, on a :

$$u(x) = 2e^x \quad u'(x) = 2e^x \quad v(x) = x - 3 \quad v'(x) = 1$$

Et on a donc :

$$f'(x) = \frac{2e^x \times (x - 3) - 2e^x \times 1}{(x - 3)^2} = \frac{2xe^x - 6e^x - 2e^x}{(x - 3)^2} = \frac{(2x - 8)e^x}{(x - 3)^2}$$

5. Etudier le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de f sur $] -\infty; 3[$.

$\forall x \in] -\infty; 3[$, $(x - 3)^2 > 0$ et $e^x > 0$ et $2x - 8 < 0$ donc $f'(x) < 0$ sur $] -\infty; 3[$.

f admet donc le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	3
$f(x)$	0	$-\infty$

6. a) f est dérivable donc continue sur $] -\infty; 3[$ et f est strictement décroissante sur $] -\infty; 3[$.

L'intervalle image de $] - \infty; 3[$ par la fonction f est $] - \infty; 0[$ et $-1 \in] - \infty; 0[$ donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = -1$ admet une unique solution sur $] - \infty; 3[$.

D'après la calculatrice, $0,3 < \alpha < 0,4$.

b) $S =] - \infty; \alpha]$.

7. On admet dans cette question que, pour tout réel $x \in] - \infty; 3[$, on a :

$$f''(x) = \frac{2e^x(x^2 - 8x + 17)}{(x - 3)^3}$$

Etudier la convexité de la fonction f sur $] - \infty; 3[$.

$\forall x \in] - \infty; 3[$, $2e^x > 0$ et $(x - 3)^3 < 0$

On étudie le signe de $x^2 - 8x + 17$:

$\Delta = (-8)^2 - 4 \times 1 \times 17 = -4 < 0$ donc $x^2 - 8x + 17$ est du signe de $a = 1 > 0$.

Ainsi, $f''(x) < 0$ ce qui implique que la fonction f est concave sur $] - \infty; 3[$.

Exercice n°4 : 5 points

Suites Numériques

Partie A : A l'aide du théorème du point fixe :

1. $u_1 = \frac{4u_0}{1+3u_0} = \frac{4 \times \frac{1}{2}}{1+3 \times \frac{1}{2}} = \frac{2}{\frac{5}{2}} = \frac{4}{5}$

$$u_2 = \frac{4u_1}{1+3u_1} = \frac{4 \times \frac{4}{5}}{1+3 \times \frac{4}{5}} = \frac{\frac{16}{5}}{\frac{17}{5}} = \frac{16}{17}$$

2. On définit sur $[0; +\infty[$ la fonction f par :

$$f(x) = \frac{4x}{1+3x}$$

Soit $x \in [0; +\infty[$,

$$f'(x) = \frac{4(1+3x) - 3(4x)}{(1+3x)^2} = \frac{4 + 12x - 12x}{(1+3x)^2} = \frac{4}{(1+3x)^2} > 0$$

Donc f est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

3. On pose $P_n : \ll 0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1 \gg$.

Initialisation : $u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_1 = \frac{4}{5}$

$0 \leq \frac{1}{2} \leq \frac{4}{5} \leq 1$ donc $0 \leq u_0 \leq u_1 \leq 1$. Donc P_0 est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que P_n est vraie, c'est-à-dire : $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$.

Montrons que P_{n+1} est vraie, c'est-à-dire : $0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 1$.

Par hypothèse de récurrence :

$$0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$$

Or $u_{n+1} = f(u_n)$ et f est strictement croissante sur $[0; +\infty[$ donc on a :

$$\begin{aligned} f(0) &\leq f(u_n) \leq f(u_{n+1}) \leq f(1) \\ &\Leftrightarrow 0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 1 \end{aligned}$$

Donc P_{n+1} est vraie.

Conclusion : P_0 est vraie et P_n est héréditaire donc d'après le principe de récurrence, P_n est vraie pour tout entier naturel n .

4. D'après la question précédente, nous avons démontré que la suite (u_n) est croissante et majorée donc d'après le théorème de convergence monotone, (u_n) converge.

5. $u_{n+1} = f(u_n)$, f est continue sur $[0; +\infty[$, (u_n) converge donc d'après le théorème du point fixe, la limite de (u_n) est solution de $f(x) = x$.

$$\begin{aligned} f(x) = x &\Leftrightarrow \frac{4x}{1+3x} = x \Leftrightarrow 4x = x(1+3x) \Leftrightarrow 4x = x + 3x^2 \Leftrightarrow 3x^2 - 3x = 0 \\ &\Leftrightarrow 3x(x-1) = 0 \end{aligned}$$

Donc $x = 0$ ou $x = 1$.

Or $u_0 = \frac{1}{2}$ et (u_n) est croissante donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$.

Partie B : A l'aide d'une expression explicite :

Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par :

$$v_n = \frac{u_n}{1 - u_n}$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{1 - u_{n+1}} = \frac{\frac{4u_n}{1 + 3u_n}}{1 - \frac{4u_n}{1 + 3u_n}} = \frac{\frac{4u_n}{1 + 3u_n}}{\frac{1 + 3u_n - 4u_n}{1 + 3u_n}} = \frac{4u_n}{1 - u_n} = 4v_n$$

Donc (v_n) est géométrique de raison 4.

2. $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = v_0 \times q^n = \frac{u_0}{1 - u_0} \times 4^n = 4^n$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n = \frac{u_n}{1 - u_n} \Leftrightarrow u_n = v_n(1 - u_n) \Leftrightarrow u_n = v_n - v_n u_n \Leftrightarrow u_n + v_n u_n = v_n$$

$$\Leftrightarrow u_n(1 + v_n) = v_n \Leftrightarrow u_n = \frac{v_n}{1 + v_n} \Leftrightarrow u_n = \frac{4^n}{4^n + 1}$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \frac{4^n}{4^n + 1} = \frac{4^n}{4^n \left(1 + \frac{1}{4^n}\right)} = \frac{1}{1 + \frac{1}{4^n}}$$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{4^n} = 0$ donc par somme et par quotient,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$$

Exercice n°5 : Q.C.M :

Suites Numériques – Fonction logarithme – Dérivation – Convexité

Pour chacune des questions ci-dessous, indiquer sur votre copie le numéro de la question ainsi que la lettre associée à la bonne réponse. **Aucune justification** n'est demandée. **Une seule réponse** est exacte.

1. Soit (u_n) une suite définie pour tout entier naturel n tel que :

$$\frac{1}{2} \leq u_n \leq \frac{n^2 + 2}{2n^2 + 3n + 8}$$

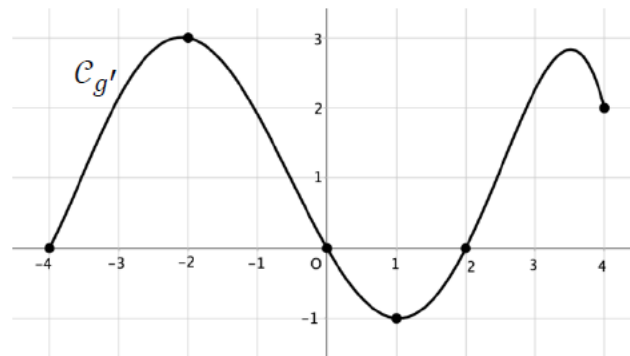
Réponse b : (u_n) converge vers $\frac{1}{2}$.

Indication : on utilise le théorème des gendarmes pour conclure.

2. On suppose que g est une fonction dérivable sur l'intervalle $[-4; 4]$. On donne ci-contre la représentation graphique de sa **fonction dérivée g'** .

Réponse c : g est convexe sur l'intervalle $[1; 2]$.

Indication : C'est la courbe de g' qui est donnée !! Pas la courbe de g .



3. Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = x \ln(x) - x$

Réponse c : $f'(x) = \ln(x)$

Indication : Pour dériver $x \ln(x)$, c'est la formule du produit de deux fonctions qu'il faut utiliser.

4. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par $f(x) = 2 + 3 \ln(x)$.

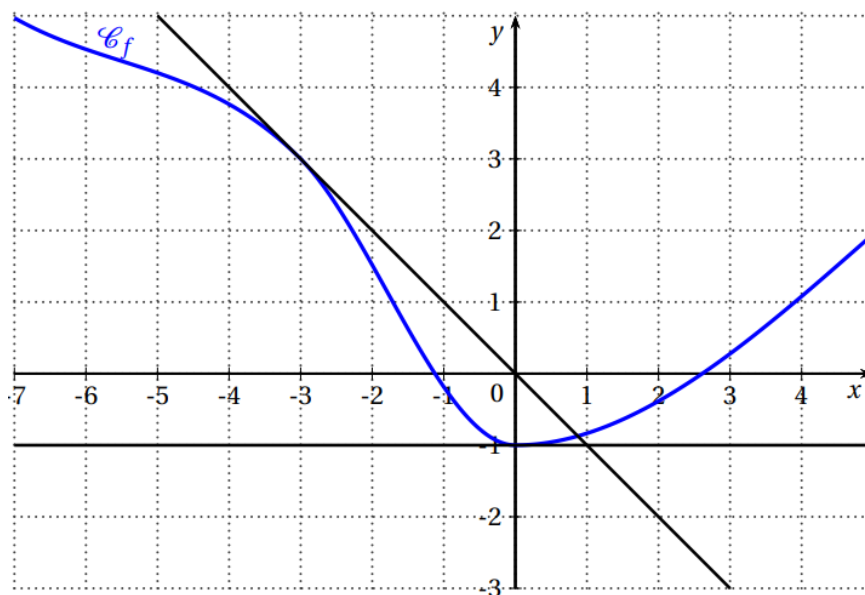
La tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 1 a pour équation :

Réponse b : $y = 3x - 1$

Indication : L'équation de la tangente au point d'abscisse a est :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

5. La représentation graphique d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ est tracée ci-dessous ainsi que les tangentes respectives aux points d'abscisses -3 et 0 .



Réponse a : $f'(-3) = -1$.

Indication : Graphiquement, $f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse a .

Exercice n°6 : 5 points

On considère dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ de l'espace les points suivants :

$$A(0; 3; -5); B(-1; 5; -6); C(1; 1; 1); D(-1; 2; -3)$$

1. a) $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$.

$$\frac{x_{\overrightarrow{AB}}}{x_{\overrightarrow{AC}}} = -\frac{1}{1} = -1; \frac{y_{\overrightarrow{AB}}}{y_{\overrightarrow{AC}}} = \frac{2}{-2} = -1; \frac{z_{\overrightarrow{AB}}}{z_{\overrightarrow{AC}}} = -\frac{1}{6}$$

Il n'y a donc pas de coefficient réel k tel que $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$ donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires ce qui implique que les points A, B et C définissent un plan.

b) Montrer que le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est normal au plan (ABC) .

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 2 \times (-1) + 2 \times 1 + (-1) \times 0 = 0.$$

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 1 \times 2 + 1 \times (-2) + 6 \times 0 = 0.$$

Donc $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC) donc $\vec{n}$ est normal au plan (ABC) .

d) $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est normal au plan (ABC) donc $(ABC): 2x + 1y + 0z + d = 0$

$$\Leftrightarrow (ABC): 2x + y + d = 0$$

$$C(1; 1; 1) \in (ABC) \Leftrightarrow 2 + 1 + d = 0 \Leftrightarrow d = -3$$

$$(ABC): 2x + y - 3 = 0$$

e) Vérifions si $D(-1; 2; -3) \in (ABC)$.

$$2 \times (-1) + 2 - 3 = -3 \neq 0$$

Donc $D \notin (ABC)$ ce qui implique que les points A, B, C, D ne sont pas coplanaires.

2. a) $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $A(0; 3; -5) \in (AB)$ donc la représentation paramétrique de (AB) :

$$(AB): \begin{cases} x = -t \\ y = 3 + 2t, t \in \mathbb{R} \\ z = -5 - t \end{cases}$$

b) On cherche t tel que :

$$\begin{cases} 1 = -t \\ 1 = 3 + 2t \\ -4 = -5 - t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = -1 \\ t = -1 \end{cases}$$

Donc $G \in (AB)$.

3. Soit (d) la droite dont la représentation paramétrique est :

$$(d): \begin{cases} x = -3 + 2k \\ y = 9 + k \\ z = -8 - 2k \end{cases}, k \in \mathbb{R}$$

a) Le point de coordonnées $(-3; 9; -8) \in (d)$.

Le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (d) .

b) On cherche k tel que :

$$\begin{cases} 1 = -3 + 2k \\ 1 = 9 + k \\ -4 = -8 - 2k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 2 \\ k = -8 \\ k = -2 \end{cases}$$

Donc $G \notin (d)$.

c) Les vecteurs $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires donc les droites (d) et (AB)

ne sont pas parallèles.

d) On cherche le couple $(t; k)$ tel que :

$$\begin{cases} -3 + 2k = -t \\ 9 + k = 3 + 2t \\ -8 - 2k = -5 - t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 + 2(-6 + 2t) = -t \\ k = -6 + 2t \\ -8 - 2k = -5 - t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 \\ k = 0 \\ -8 - 2 \times 0 = -5 - 3 \end{cases}$$

Donc $S = (3; 0)$ ce qui implique que $I(-3; 9; -8)$.

e) Si deux droites sont sécantes, alors elles sont coplanaires donc (d) et (AB) sont coplanaires.