

BAC BLANC DE MATHEMATIQUES N°1

Exercice n°1 : 5 points

Probabilités conditionnelles – Suites numériques

En France, les étudiants mangent très souvent à l'extérieur de leur établissement scolaire le midi. Ils choisissent généralement chaque midi entre un hamburger ou une salade pour leur déjeuner. On cherche à modéliser l'évolution de leur choix dans le temps.

On observe que :

- Si un élève a choisi un **hamburger** un jour, la probabilité qu'il reprenne un **hamburger** le lendemain est **0,8**.
- Si une personne a choisi une **salade** un jour, la probabilité qu'il prenne un **hamburger** le lendemain est 0,3.

On appelle H_n l'événement « l'élève choisit un hamburger le n -ième jour » pour $n \in \mathbb{N}$. On note p_n la probabilité de l'événement H_n et on considère que $p_0 = 1$.

1. Donner p_1 et montrer que $p_2 = 0,7$. On pourra s'appuyer sur un arbre pondéré.

2. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-contre :

3. Montrer que, pour tout entier naturel n ,

$$p_{n+1} = 0,5p_n + 0,3$$

4. a) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $p_n \geq 0,6$.

b) Etudier le sens de variation de la suite (p_n) .

c) Justifier que la suite (p_n) est convergente.

5. On définit dans cette question la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par

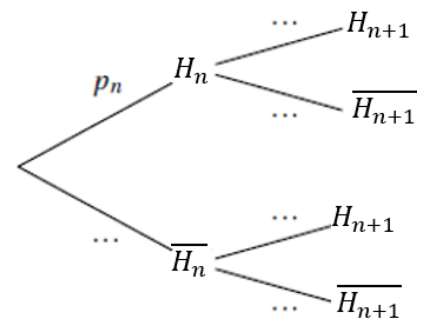
$$u_n = p_n - 0,6$$

- a) Montrer que (u_n) est une suite géométrique dont on déterminera le premier terme u_0 et la raison q .

- b) En déduire que pour tout entier naturel n ,

$$p_n = 0,4 \times 0,5^n + 0,6$$

- c) Déterminer la limite de la suite (p_n) et interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.



Exercice n°2 : 5 points

Probabilités conditionnelles – Loi Binomiale

Une entreprise de marketing a étudié la satisfaction des utilisateurs concernant une application mobile de réseau social. Les utilisateurs peuvent s'inscrire de deux manières : soit via leur adresse e-mail, soit via leur compte Apple.

Les utilisateurs inscrits via leur adresse e-mail représentant 70% des inscriptions, tandis que ceux inscrits via Apple représentent 30% des inscriptions.

Une enquête montre que :

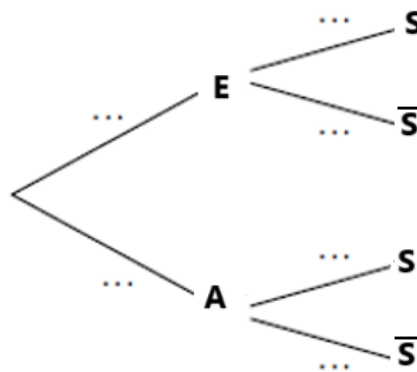
- Parmi les utilisateurs ayant réalisé leur inscription par e-mail, 85% d'entre eux sont satisfaits.
- Parmi les utilisateurs ayant réalisé leur inscription par Apple, 25% ne sont pas satisfaits.

On choisit au hasard un utilisateur inscrit sur l'application mobile et on définit les événements suivants :

- E : « L'utilisateur s'est inscrit via son adresse e-mail ».
- A : « L'utilisateur s'est inscrit via son compte Apple ».
- S : « L'utilisateur est satisfait de l'application mobile ».

On note $\bar{S}$ l'évènement contraire de l'évènement S .

1. Recopier et compléter l'arbre de probabilité ci-dessous :



2. Calculer la probabilité qu'un utilisateur s'est inscrit via son adresse e-mail et qui est satisfait de l'application.
3. Montrer que la probabilité qu'un utilisateur soit satisfait est égale à 0,82.

4. Un manager d'Apple affirme que la probabilité qu'un utilisateur est satisfait sachant qu'il a choisi de s'inscrire par son compte Apple est supérieure à 0,25. A-t-il raison ? Justifier.
5. L'entreprise marketing souhaite, pour améliorer sa plateforme, faire une étude plus poussée sur la satisfaction de ses utilisateurs. Pour cela, elle prélève au hasard un échantillon de 100 utilisateurs. On considère que cet échantillon est de taille suffisante pour l'assimiler à un tirage avec remise.
- On appelle X la variable aléatoire correspondant au nombre d'utilisateurs satisfaits de l'application.
- a) Justifier la loi suivie par X et préciser les paramètres de celles-ci.
 - b) Calculer la probabilité que 80 utilisateurs soient satisfaits de l'application. Donner une valeur approchée au millième.
 - c) Déterminer l'espérance de X . Interpréter le résultat dans le contexte de l'énoncé.
6. L'entreprise souhaite que la probabilité qu'au moins un utilisateur soit satisfait soit supérieure ou égale à 0,99. Quelle doit être la taille minimale de l'échantillon à prélever afin que cette condition soit respectée.

Exercice n°3 : 5 points

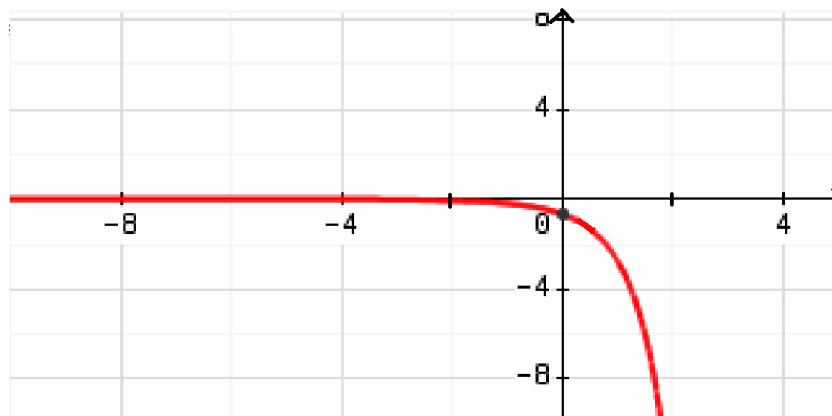
Fonction exponentielle – Continuité – Convexité – Limites de fonction – Dérivation

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $] -\infty; 3[$ par :

$$f(x) = \frac{2e^x}{x-3}$$

On admet dans cet exercice que la fonction f est dérivable sur $] -\infty; 3[$.

On a représenté ci-dessous C_f la courbe représentative de la fonction f .



1. **Graphiquement**, conjecturer la convexité de f sur l'intervalle $] -\infty; 3[$.

2. Déterminer la limite de f quand x tend vers 3.

3. a) Déterminer la limite de f quand x tend vers $-\infty$.

b) Que peut-on en déduire graphiquement pour C_f ?

4. Montrer que pour tout réel $x \in] -\infty; 3[$, on a :

$$f'(x) = \frac{(2x-8)e^x}{(x-3)^2}$$

5. Etudier le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de f sur $] -\infty; 3[$.

6. a) Montrer que l'équation $f(x) = -1$ admet une unique solution α sur l'intervalle $] -\infty; 3[$. Donner un encadrement de α à 10^{-1} près.

b) En déduire les solutions de $f(x) \geq -1$ sur l'intervalle $] -\infty; 3[$.

7. On admet dans cette question que, pour tout réel $x \in] -\infty; 3[$, on a :

$$f''(x) = \frac{2e^x(x^2 - 8x + 17)}{(x-3)^3}$$

Etudier la convexité de la fonction f sur $] -\infty; 3[$.

Exercice n°4 : 5 points

Suites Numériques

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et, pour tout entier naturel n , par la relation de récurrence suivante :

$$u_{n+1} = \frac{4u_n}{1 + 3u_n}$$

L'objectif de cet exercice est de déterminer de deux manières différentes la limite de la suite (u_n) .

Partie A : A l'aide du théorème du point fixe :

1. Calculer u_1 et u_2 .
2. On définit sur $[0; +\infty[$ la fonction f par :

$$f(x) = \frac{4x}{1 + 3x}$$

Montrer que la fonction f est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

3. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n ,

$$0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$$

4. En déduire que la suite (u_n) converge.
5. Déterminer la limite de la suite (u_n) .

Partie B : A l'aide d'une expression explicite :

Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par :

$$v_n = \frac{u_n}{1 - u_n}$$

1. Montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison 4.
2. Exprimer v_n en fonction de n .
3. En déduire que, pour tout entier naturel n , on a :

$$u_n = \frac{4^n}{4^n + 1}$$

4. Déterminer la limite de la suite (u_n) .

Exercice n°5 : Q.C.M : 5 points

Suites Numériques – Fonction logarithme – Dérivation – Convexité

Pour chacune des questions ci-dessous, indiquer sur votre copie le numéro de la question ainsi que la lettre associée à la bonne réponse. **Aucune justification** n'est demandée. **Une seule réponse** est exacte.

1. Soit (u_n) une suite définie pour tout entier naturel n tel que :

$$\frac{1}{2} \leq u_n \leq \frac{n^2 + 2}{2n^2 + 3n + 8}$$

- a) (u_n) converge vers 0.
- b) (u_n) converge vers $\frac{1}{2}$.
- c) (u_n) diverge vers $+\infty$.
- d) (u_n) diverge vers $-\infty$.

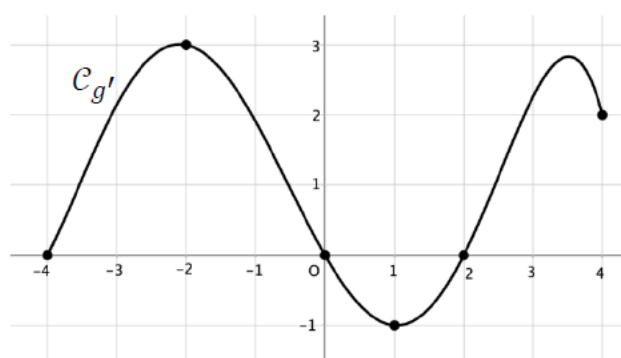
2. On suppose que g est une fonction dérivable sur l'intervalle $[-4; 4]$.

On donne ci-contre la

représentation graphique de sa

fonction dérivée g' . On peut affirmer que :

- a) g admet un maximum en -2 .
- b) g est croissante sur l'intervalle $[1; 2]$.
- c) g est convexe sur l'intervalle $[1; 2]$.
- d) g admet un minimum en 0.



3. Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = x \ln(x) - x$

- a) $f'(x) = \frac{1}{x} - 1$
- b) $f'(x) = \ln(x) - 1$
- c) $f'(x) = \ln(x)$

d) $f'(x) = x \ln(x)$

4. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par $f(x) = 2 + 3 \ln(x)$.

La tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 1 a pour équation :

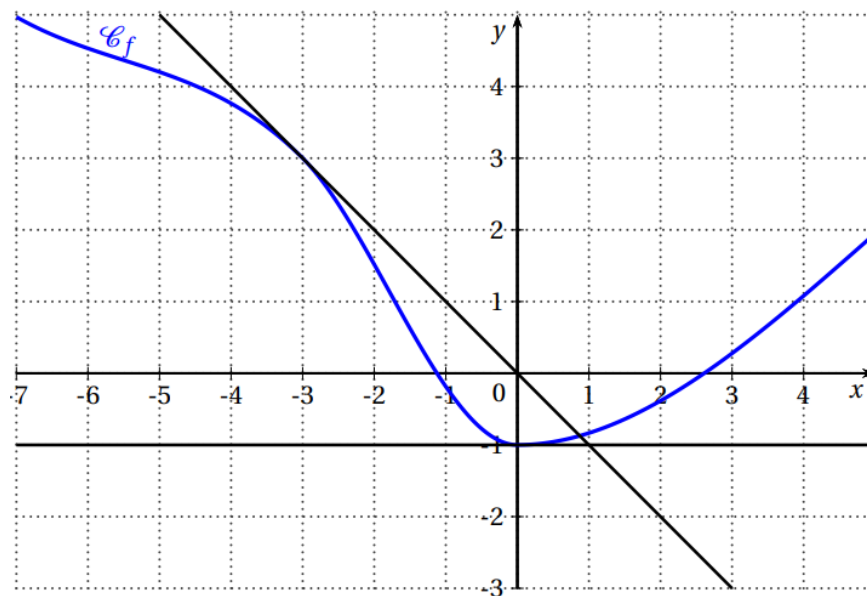
a) $y = \frac{3}{x}$

b) $y = 3x - 1$

c) $y = 3x$

d) $y = 3x + 2$

5. La représentation graphique d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ est tracée ci-dessous ainsi que les tangentes respectives aux points d'abscisses -3 et 0 .



a) $f'(-3) = -1$.

b) $f'(-1) = 0$.

c) $f'(0) = -1$.

d) $f'(-3) = 3$.

Exercice n°6 : 5 points

On considère dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ de l'espace les points suivants :

$$A(0; 3; -5) ; B(-1; 5; -6) ; C(1; 1; 1) ; D(-1; 2; -3)$$

1.
 - a) Montrer que A, B et C définissent un plan.
 - b) Montrer que le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est normal au plan (ABC) .
 - c) En déduire une équation cartésienne du plan (ABC) .
 - d) Les points A, B, C et D sont-ils coplanaires ? Justifier.
2.
 - a) Déterminer la représentation paramétrique de la droite (AB) .
 - b) Le point $G(1; 1; -4)$ appartient-il à la droite (AB) ? Justifier.
3. Soit (d) la droite dont la représentation paramétrique est :

$$(d): \begin{cases} x = -3 + 2k \\ y = 9 + k \\ z = -8 - 2k \end{cases}, k \in \mathbb{R}$$

- a) Donner un point et un vecteur directeur de (d) .
- b) Montrer que G n'appartient pas à la droite (d) .
- c) Montrer que les droites (d) et (AB) ne sont pas parallèles.
- d) Montrer que les droites (d) et (AB) sont sécantes en un point I dont on déterminera les coordonnées.
- e) Peut-on en déduire que les droites (d) et (AB) sont coplanaires ?