

FONCTION LOGARITHME NEPERIEN

CORRECTION

Exercice n°1

$$1) A = \ln 8 = \ln(2^3) = \boxed{3\ln 2}$$

$$B = \ln \frac{1}{16} = \ln\left(\frac{1}{2^4}\right) = -\ln(2^4) = \boxed{-4\ln 2}$$

$$C = \frac{1}{2} \ln 16 = \frac{1}{2} \ln(2^4) = \frac{1}{2} \times 4 \ln(2) = \boxed{2\ln 2}$$

$$D = \frac{1}{2} \ln \frac{1}{4} = -\frac{1}{2} \ln 4 = -\frac{1}{2} \ln(2^2) = -\frac{1}{2} \times 2 \ln(2) = \boxed{-\ln(2)}$$

$$2) a = \ln 24 = \ln(3 \times 8) = \ln 3 + \ln(2^3) = \boxed{\ln 3 + 3\ln 2}$$

$$b = \ln 144 = \ln(12^2) = 2\ln(12) = 2\ln(3 \times 2^2) = 2[\ln 3 + \ln(2^2)] = 2[\ln 3 + 2\ln(2)] = \boxed{2\ln 3 + 4\ln 2}$$

$$c = \ln \frac{8}{9} = \ln 8 - \ln 9 = \ln(2^3) - \ln(3^2) = \boxed{3\ln 2 - 2\ln 3}$$

$$3) A = 2\ln 3 + \ln 2 + \ln \frac{1}{2} = \ln(3^2) + \ln\left(2 \times \frac{1}{2}\right) = \ln 9 + \underbrace{\ln(1)}_0 = \boxed{\ln 9}$$

$$B = \frac{1}{2} \ln 9 - 2\ln 3 = \ln(\sqrt{9}) - 2\ln 3 = \ln 3 - 2\ln 3 = -\ln 3 = \boxed{\ln\left(\frac{1}{3}\right)}$$

Exercice n°2

A partir de $\ln(2) \approx 0,7$ et $\ln(3) \approx 1,1$ à 10^{-1} près, on calcule :

$$\ln(4) = \ln(2^2) = 2\ln(2) \approx 2 \times 0,7 \approx 1,4$$

$$\ln(6) = \ln(2 \times 3) = \ln(2) + \ln(3) \approx 0,7 + 1,1 \approx 1,8$$

$$\ln(9) = \ln(3^2) = 2\ln(3) \approx 2 \times 1,1 \approx 2,2$$

$$\ln(8) = \ln(2^3) = 3\ln(2) \approx 3 \times 0,7 \approx 2,1$$

$$\ln(27) = \ln(3^3) = 3\ln(3) \approx 3 \times 1,1 \approx 3,3$$

$$\ln(72) = \ln(9 \times 8) = \ln 9 + \ln 8 \approx 2,2 + 2,1 \approx 4,3$$

$$\ln(216) = \ln(3 \times 72) = \ln 3 + \ln 72 \approx 1,1 + 4,3 \approx 5,4$$

$$\ln\left(\frac{1}{6}\right) = -\ln 6 \approx -1,8$$

$$\ln\left(\frac{1}{16}\right) = -\ln 16 = -(\ln 2^4) = -4\ln(2) \approx -4 \times 0,7 \approx -2,8$$

D'où le tableau

a	2	3	4	6	9	8	27	72	216	$\ln\left(\frac{1}{6}\right)$	$\ln\left(\frac{1}{16}\right)$
$\ln(a)$	0,7	1,1	1,4	1,8	2,2	2,1	3,3	4,3	5,4	-1,8	-2,8

Exercice n°3

On transforme les écritures : $x = 3\ln 2 = \ln(2^3) = \ln 8$ et $y = 2\ln 3 = \ln(3^2) = \ln 9$

Puisque la fonction $\ln$ est strictement croissante sur $]0; +\infty[$, on aura $\ln 8 < \ln 9$ c'est-à-dire $\boxed{x < y}$

On transforme les écritures : $x = \ln 5 - \ln 2 = \ln\left(\frac{5}{2}\right)$ et $y = \ln 12 - \ln 5 = \ln\left(\frac{12}{5}\right)$

Puisque la fonction $\ln$ est strictement croissante sur $]0; +\infty[$, et puisque $\frac{12}{5} < \frac{5}{2}$, on aura $\ln\left(\frac{12}{5}\right) < \ln\left(\frac{5}{2}\right)$, c'est-à-dire

$$\boxed{x > y}$$

Exercice n°4

$$a = \ln(e^2) = 2\ln(e) = 2 \times 1 = 2$$

$$b = \ln(e^3) = 3\ln(e) = 3 \times 1 = 3$$

$$c = \ln\left(\frac{1}{e^2}\right) = -\ln(e^2) = -2\ln(e) = -2 \times 1 = -2$$

$$d = \ln(\sqrt{e}) = \ln\left(e^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2}\ln(e) = \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}$$

$$e = \ln(e\sqrt{e}) = \ln(e) + \ln(\sqrt{e}) = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

Exercice n°5

1) On calcule

$$f(2) = \frac{20}{\ln(10)} \ln(50000 \times 2) = \frac{20}{\ln(10)} \ln(100000) = \frac{20}{\ln(10)} \ln(10^5) = \frac{20}{\ln(10)} \times 5 \ln(10) \boxed{= 100},$$

$$f(0,2) = \frac{20}{\ln(10)} \ln(50000 \times 0,2) = \frac{20}{\ln(10)} \ln(10000) = \frac{20}{\ln(10)} \ln(10^4) = \frac{20}{\ln(10)} \times 4 \ln(10) \boxed{= 80},$$

$$\text{et } f(0,02) = \frac{20}{\ln(10)} \ln(50000 \times 0,02) = \frac{20}{\ln(10)} \ln(1000) = \frac{20}{\ln(10)} \ln(10^3) = \frac{20}{\ln(10)} \times 3 \ln(10) \boxed{= 60}. \text{ Enfin,}$$

$$f(p_0) = \frac{20}{\ln(10)} \ln(50000 p_0) = \frac{20}{\ln(10)} \ln(50000 \times 20 \times 10^{-6}) = \frac{20}{\ln(10)} \ln(1000000 \times 10^{-6}) = \frac{20}{\ln(10)} \ln(10^3) = \frac{20}{\ln(10)} \times \ln(1) \boxed{= 0}$$

2) On résout :

$$f(p) \geq 120 \Leftrightarrow \frac{20}{\ln(10)} \ln(50000 p) \geq 120 \Leftrightarrow \ln(50000 p) \geq \frac{120 \times \ln(10)}{20}$$

$$\Leftrightarrow \ln(50000 p) \geq 6 \ln(10) \Leftrightarrow \ln(50000 p) \geq \ln(10^6)$$

Par stricte croissance de la fonction logarithme sur $]0; +\infty[$, on déduit $\ln(50000 p) \geq \ln(10^6) \Leftrightarrow 50000 p \geq 10^6$ donc

$$\boxed{p \geq \frac{1000000}{50000} = 20}. \text{ La pression correspondant au niveau sonore de 120 décibels est donc de 20 Pascals}$$

3) Pour tout réel $x \geq p_0$, on calcule

$$\boxed{f(10x)} = \frac{20}{\ln(10)} \ln(50000 \times 10x) = \frac{20}{\ln(10)} \ln(500000x) = \frac{20}{\ln(10)} [\ln(50000x) + \ln 10]$$

$$= \frac{20}{\ln(10)} \ln(50000x) + \frac{20}{\ln(10)} \ln(10) \boxed{= f(x) + 20}$$

le niveau sonore augmente de 20 décibels quand la pression s'exerçant sur le tympan est multipliée par 10

4) Pour tout réel $x \geq p_0$, on calcule

$$\boxed{f(100x)} = \frac{20}{\ln(10)} \ln(50000 \times 100x) = \frac{20}{\ln(10)} \ln(5000000x) = \frac{20}{\ln(10)} [\ln(50000x) + \ln 100]$$

$$= \frac{20}{\ln(10)} \ln(50000x) + \frac{20}{\ln(10)} \ln(100) = \frac{20}{\ln(10)} \ln(50000x) + \frac{20}{\ln(10)} \ln(10^2)$$

$$= \frac{20}{\ln(10)} \ln(50000x) + \frac{20}{\ln(10)} \times 2 \ln(10) \boxed{= f(x) + 40}$$

le niveau sonore augmente de 40 décibels quand la pression s'exerçant sur le tympan est multipliée par 100

Exercice n°6

1) L'équation est définie si et seulement

$$\begin{cases} 2+5x > 0 \\ x+6 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -\frac{2}{5} \\ x > -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in]-\frac{2}{5}; +\infty[\\ x \in]-6; +\infty[\end{cases} \Leftrightarrow x \in]-\frac{2}{5}; +\infty[\cap]-6; +\infty[=]-\frac{2}{5}; +\infty[$$

$$\text{Pour tout } x \in]-\frac{2}{5}; +\infty[, \ln(2+5x) = \ln(x+6) \Leftrightarrow 2+5x = x+6 \Leftrightarrow 4x = 4 \Leftrightarrow x = 1. \text{ Comme } 1 \in]-\frac{2}{5}; +\infty[, S = \{1\}$$

2) L'équation est définie si et seulement

$$\begin{cases} x-1 > 0 \\ x-3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x > 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in]1; +\infty[\\ x \in]3; +\infty[\end{cases} \Leftrightarrow x \in]1; +\infty[\cap]3; +\infty[=]3; +\infty[$$

$$\text{Pour tout } x \in]3; +\infty[,$$

$$\ln(x-1) + \ln(x-3) = \ln(3) \Leftrightarrow \ln((x-1)(x-3)) = \ln(3) \text{ (car } \ln(a) + \ln(b) = \ln(a \times b))$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x-3) = 3 \Leftrightarrow x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow x(x-4) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 4.$$

$$\text{Mais } 0 \notin]3; +\infty[\text{ donc } S = \{4\}$$

3) L'équation est définie si et seulement $x \in]0; +\infty[$

$$\ln x = 2 \Leftrightarrow \ln x = 2 \times 1 \Leftrightarrow \ln x = 2 \times \ln e \Leftrightarrow \ln x = \ln(e^2) \Leftrightarrow x = e^2. \quad \boxed{S = \{e^2\}}$$

4) L'équation est définie si et seulement $x \in]0; +\infty[$

$$\frac{2(1 + \ln x)}{x} = 0 \Leftrightarrow 1 + \ln x = 0 \quad \text{car une fraction est nulle ssi son numérateur l'est}$$

$$\Leftrightarrow \ln x = -1 \Leftrightarrow x = e^{-1} = \frac{1}{e}. \quad \boxed{S = \left\{\frac{1}{e}\right\}}$$

5) En posant $X = \ln x$, l'équation devient équivalente à l'équation du second degré $X^2 + X - 6 = 0$, que l'on sait résoudre : $X = 2$ ou $X = -3$. En revenant à la variable x on a : $X = 2 \Leftrightarrow \ln x = 2 \Leftrightarrow x = e^2$ et

$$X = -3 \Leftrightarrow \ln x = -3 \Leftrightarrow x = e^{-3}. \quad \text{Finalement, } \boxed{S = \{e^2; e^{-3}\}}$$

6) L'équation est définie si et seulement $2x - 5 > 0 \Leftrightarrow x \in \left] \frac{5}{2}; +\infty \right[$

$$\ln(2x - 5) = 1 \Leftrightarrow \ln(2x - 5) = \ln(e) \Leftrightarrow 2x - 5 = e \Leftrightarrow x = \frac{e + 5}{2}. \quad \text{Comme } \frac{e + 5}{2} \in \left] \frac{5}{2}; +\infty \right[, \quad \boxed{S = \left\{\frac{e + 5}{2}\right\}}$$

7) L'équation $\ln\left(\frac{x-1}{2x-1}\right) = 0$ n'est définie que si et seulement si $\frac{x-1}{2x-1} > 0$.

On dresse un tableau de signes de l'expression $\frac{x-1}{2x-1}$:

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	1	$+\infty$
$x-1$	—	—	0	+
$2x-1$	—	0	+	+
$\frac{x-1}{2x-1}$	+	—	0	+

L'équation $\ln\left(\frac{x-1}{2x-1}\right) = 0$ n'est donc définie que si et seulement si

$$x \in \left] -\infty; \frac{1}{2} \right[\cup]1; +\infty[. \quad \text{En utilisant la bijectivité de la fonction } \ln, \text{ on obtient}$$

$$\ln\left(\frac{x-1}{2x-1}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{2x-1} = 1 \Leftrightarrow x-1 = 2x-1 \Leftrightarrow x = 0. \quad \text{Puisque } 0 \in \left] -\infty; \frac{1}{2} \right[\cup]1; +\infty[, \text{ on en conclut que } \boxed{S = \{0\}}$$

8) L'équation $\ln\left(\left|\frac{x-1}{2x-1}\right|\right) = 0$ n'est définie que si et seulement si $\frac{x-1}{2x-1} \neq 0$, donc d'après le tableau de signes ci-dessus,

que si et seulement si $x \in \left] -\infty; \frac{1}{2} \right[\cup \left] \frac{1}{2}; 1 \right[\cup]1; +\infty[$. En utilisant la bijectivité de la fonction $\ln$, on obtient

$$\ln\left(\left|\frac{x-1}{2x-1}\right|\right) = 0 \Leftrightarrow \left|\frac{x-1}{2x-1}\right| = 1 \Leftrightarrow \frac{x-1}{2x-1} = 1 \quad \text{ou} \quad \frac{x-1}{2x-1} = -1. \quad \text{La première équation a été résolue dans la question 2. La deuxième est}$$

$$\frac{x-1}{2x-1} = -1 \Leftrightarrow x-1 = -2x+1 \Leftrightarrow 3x = 2 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}. \quad \text{Ces deux solutions appartenant à l'ensemble de définition}$$

$$\text{de l'équation, on conclut que } \boxed{S = \left\{0; \frac{2}{3}\right\}}$$

9) L'équation $\ln(x-1) = \ln(2x-1)$ est définie si et seulement si on a simultanément $x-1 > 0 \Leftrightarrow x \in]1; +\infty[$ et

$$2x-1 > 0 \Leftrightarrow x \in \left] \frac{1}{2}; +\infty \right[, \text{ donc si et seulement si } x \in \left] \frac{1}{2}; +\infty \right[\cap]1; +\infty[=]1; +\infty[. \quad \text{On utilise la bijectivité de la fonction}$$

$\ln$: Pour tout $x \in]1; +\infty[$, $\ln(x-1) = \ln(2x-1) \Leftrightarrow x-1 = 2x-1 \Leftrightarrow x = 0$. Or $0 \notin]1; +\infty[$, donc l'équation n'admet ps de solution réelle.

10) L'équation $\ln(|x-1|) = \ln(2x-1)$ est définie si et seulement si on a simultanément $x-1 \neq 0 \Leftrightarrow x \in \left] -\infty; 1 \right[\cup]1; +\infty[$ et

$$2x-1 > 0 \Leftrightarrow x \in \left] \frac{1}{2}; +\infty \right[, \text{ donc si et seulement si } x \in \left] \frac{1}{2}; +\infty \right[\cap \left(\left] -\infty; 1 \right[\cup]1; +\infty \right) = \left] \frac{1}{2}; 1 \right[\cup]1; +\infty[. \quad \text{On utilise la}$$

bijectivité de la fonction $\ln$: Pour tout $x \in \left] \frac{1}{2}; 1 \right[\cup]1; +\infty[$, $\ln(|x-1|) = \ln(2x-1) \Leftrightarrow |x-1| = 2x-1$, ce qui équivaut à

deux équations : $x-1=2x-1 \Leftrightarrow x=0$ (déjà résolue dans la question 4) et $-x+1=2x-1 \Leftrightarrow x=\frac{2}{3}$. Puisque seule cette

dernière solution appartient à l'ensemble de définition de l'équation, on conclut que $S = \left\{ \frac{2}{3} \right\}$

11) L'équation $\ln(|x-1|) = \ln(|2x-1|)$ est définie si et seulement si on a simultanément $x-1 \neq 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$ et $2x-1 \neq 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty; \frac{1}{2}[\cup]\frac{1}{2}; +\infty[$, donc si et seulement si

$$x \in \left(]-\infty; \frac{1}{2}[\cup]\frac{1}{2}; +\infty[\right) \cap (]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[) =]-\infty; \frac{1}{2}[\cup]\frac{1}{2}; 1[\cup]1; +\infty[= \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2}; 1 \right\}.$$

On utilise la bijectivité de la fonction $\ln$: Pour tout $x \in]-\infty; \frac{1}{2}[\cup]\frac{1}{2}; 1[\cup]1; +\infty[$,

$\ln(|x-1|) = \ln(|2x-1|) \Leftrightarrow |x-1| = |2x-1|$, ce qui équivaut à deux équations :

$x-1=2x-1 \Leftrightarrow x=0$ (déjà résolue dans la question 4) et $-x+1=2x-1 \Leftrightarrow x=\frac{2}{3}$ (déjà résolue dans la question 10)

Puisque ces deux solutions appartiennent à l'ensemble de définition de l'équation, on conclut que $S = \left\{ 0; \frac{2}{3} \right\}$

Exercice n°7

1) $A(x) = (x-1)(x+1)(x-2) = (x^2-1)(x-2) = x^3 - 2x^2 - x + 2$

2) (a) Examinons d'abord l'ensemble de définition de l'équation $\ln(x^3+2) = \ln(2x^2+x)$.

L'équation est bien définie si et seulement si $\begin{cases} x^3+2 > 0 \\ 2x^2+x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 > -2 \\ x(2x+1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \sqrt[3]{-2} \\ x \in]-\infty; -\frac{1}{2}[\cup]0; +\infty[\end{cases}$

L'ensemble de définition de l'équation est donc $\left] \sqrt[3]{-2}; -\frac{1}{2}[\cup]0; +\infty[$. Par bijectivité de la fonction logarithme népérien,

pour tout $x \in \left] \sqrt[3]{-2}; -\frac{1}{2}[\cup]0; +\infty[$, $\ln(x^3+2) = \ln(2x^2+x) \Leftrightarrow x^3+2 = 2x^2+x \Leftrightarrow x^3-2x^2-x+2=0$.

D'après la factorisation de la question (1), $x^3-2x^2-x+2=0 \Leftrightarrow (x-1)(x+1)(x-2)=0$. Pour qu'un produit de facteurs soit nul, il faut et il suffit qu'au moins l'un d'entre eux le soit.

Ainsi $(x-1)(x+1)(x-2)=0 \Leftrightarrow x=1$ ou $x=-1$ ou $x=2$. Les trois solutions sont compatibles avec l'ensemble de définition. Ainsi $S_a = \{-1; 1; 2\}$

(b) L'équation est définie sur $\mathbb{R}$, puisque les quantités $|x|^3+2$ et $2x^2+|x|$ sont strictement positives. En remarquant que pour tout réel x , $x^2=|x|^2$, on va poser $X=|x|$. L'équation $\ln(|x|^3+2) = \ln(2x^2+|x|) \Leftrightarrow \ln(|x|^3+2) = \ln(2|x|^2+|x|)$ devient alors équivalente à $\ln(X^3+2) = \ln(2X^2+X)$, avec la condition $X \geq 0$ (puisque $X=|x|$). D'après la question (a), on a $X=-1; 1; 2$. La valeur $X=-1$ est éliminée par la condition $X \geq 0$ (l'équation $|x|=-1$ n'admet pas de solution). En « revenant » à l'inconnue x , on a donc $X=1 \Leftrightarrow |x|=1 \Leftrightarrow x=-1$ ou $x=1$ ou $X=2 \Leftrightarrow |x|=2 \Leftrightarrow x=-2$ ou $x=2$. Ainsi

$S_b = \{-2; -1; 1; 2\}$

(c) Examinons d'abord l'ensemble de définition de l'équation $\ln(x^3-x^2-3x+3) = \ln(x^2-2x+1)$.

Notons $f(x) = x^3-x^2-3x+3$ et $g(x) = x^2-2x+1$. En remarquant que $f(1)=0$, on peut donc factoriser $f(x)$ par $x-1$. On obtient $f(x) = (x-1)(x^2-3)$, d'où une factorisation aboutie

égale à $f(x) = (x-1)(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$, qui nous permet de dresser le

tableau de signes de $f(x)$:

Ainsi $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]-\sqrt{3}; 1[\cup]\sqrt{3}; +\infty[$

x	$-\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$
$x-1$	-	0	+
$x-\sqrt{3}$	-	-	0
$x+\sqrt{3}$	-	0	+
$f(x)$	-	0	+

L'étude du signe de $g(x) = x^2 - 2x + 1$ est plus simple puisque pour tout réel x , $g(x) = (x-1)^2$, donc $g(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$.

Les deux conditions devant être réalisées simultanément, l'ensemble de définition de l'équation est donc $]-\sqrt{3}; 1[\cup]1; \sqrt{3}; +\infty[$.

Par bijectivité de la fonction logarithme népérien,

$$\ln(x^3 - x^2 - 3x + 3) = \ln(x^2 - 2x + 1) \Leftrightarrow x^3 - x^2 - 3x + 3 = x^2 - 2x + 1 \Leftrightarrow x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$$

Cette dernière équation ayant pour solution -1 ; 1 et 2 , par compatibilité avec l'ensemble de définition de l'équation, on obtient $S_c = \{-1; 2\}$.

(d) Examinons d'abord l'ensemble de définition de l'équation $\ln(x^3 - x^2 - 3x + 3) = 2\ln(1-x)$.

Le membre de gauche $\ln(x^3 - x^2 - 3x + 3)$ est défini si et seulement si $x \in]-\sqrt{3}; 1[\cup]1; \sqrt{3}; +\infty[$ (cf question (e)), tandis que le membre de droite est défini si et seulement si $1-x > 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty; 1[$.

Les deux conditions devant être réalisées simultanément, l'ensemble de définition de l'équation est donc $]-\sqrt{3}; 1[$. Pour tout $x \in]-\sqrt{3}; 1[$, par bijectivité de la fonction logarithme népérien,

$$\ln(x^3 - x^2 - 3x + 3) = 2\ln(1-x) \Leftrightarrow \ln(x^3 - x^2 - 3x + 3) = \ln[(1-x)^2]$$

$$\Leftrightarrow x^3 - x^2 - 3x + 3 = 1 - 2x + x^2 \Leftrightarrow x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$$

Cette dernière équation ayant pour solution -1 ; 1 et 2 , par compatibilité avec l'ensemble de définition de l'équation, on obtient $S_d = \{-1\}$.

Exercice n°8

1) Le système $\begin{cases} x - y = \frac{3}{2} \\ \ln x + \ln y = 0 \end{cases}$ n'est défini que si et seulement si $x > 0$ et $y > 0$. On le résout par substitution :

$$\begin{cases} x - y = \frac{3}{2} & L_1 \\ \ln x + \ln y = 0 & L_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x - \frac{3}{2} & L_1 \\ \ln x + \ln\left(x - \frac{3}{2}\right) = 0 & L_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x - \frac{3}{2} & L_1 \\ \ln\left[x\left(x - \frac{3}{2}\right)\right] = 0 & L_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x - \frac{3}{2} & L_1 \\ x\left(x - \frac{3}{2}\right) = 1 & L_2 \end{cases}$$

On résout l'équation $x^2 - \frac{3}{2}x - 1 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 3x - 2 = 0$ en calculant son discriminant

$\Delta = (-3)^2 - 4 \times 2 \times (-2) = 9 + 16 = 25$ d'où l'existence de deux solutions réelles distinctes

$x_1 = \frac{-(-3) - \sqrt{25}}{2 \times 2} = \frac{3-5}{4} = -\frac{1}{2}$ et $x_2 = \frac{-(-3) + \sqrt{25}}{2 \times 2} = \frac{3+5}{4} = 2$. La seule valeur compatible avec l'ensemble de

définition du système est $x = 2$ donc $\begin{cases} y = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2} & L_1 \\ x = 2 & L_2 \end{cases}$. Ainsi $S = \left\{\left(2; \frac{1}{2}\right)\right\}$

2) Le système $\begin{cases} 5\ln x + 2\ln y = 26 \\ 2\ln x - 3\ln y = -1 \end{cases}$ n'est défini que si et seulement si $x > 0$ et $y > 0$

On effectue un changement de variable en posant $X = \ln x$ et $Y = \ln y$. Le système $\begin{cases} 5\ln x + 2\ln y = 26 \\ 2\ln x - 3\ln y = -1 \end{cases}$ devient alors

équivalent au système. $\begin{cases} 5X + 2Y = 26 & L_1 \\ 2X - 3Y = -1 & L_2 \end{cases}$ Comme $5 \times (-3) - 2 \times 2 \neq 0$, ce système admet une unique solution

$$\begin{cases} 5X + 2Y = 26 & L_1 \\ 2X - 3Y = -1 & L_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 15X + 6Y = 78 & 3L_1 \\ 4X - 6Y = -2 & 2L_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 19X = 76 & 3L_1 - 2L_2 \\ Y = \frac{2X+1}{3} & L_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} X = \frac{76}{19} = 4 & 3L_1 - 2L_2 \\ Y = \frac{2 \times 4 + 1}{3} = 3 & L_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = 4 & 3L_1 - 2L_2 \\ Y = 3 & L_2 \end{cases}. \text{ Ainsi } S = \{(4; 3)\}$$

On « revient aux inconnues x et y » : $X = 4 \Leftrightarrow \ln x = 4 \Leftrightarrow x = e^4$ et $Y = 3 \Leftrightarrow \ln y = 3 \Leftrightarrow y = e^3$

Finalement $S = \{(e^4; e^3)\}$

3) Le système $\begin{cases} \ln xy = 4 \\ (\ln x)(\ln y) = -12 \end{cases}$ n'est défini que si et seulement si $x > 0$ et $y > 0$

Puisque pour tout $x > 0$ et $y > 0$, $\ln xy = \ln x + \ln y$, le système devient équivalent à $\begin{cases} \ln x + \ln y = 4 \\ (\ln x)(\ln y) = -12 \end{cases}$

On effectue un changement de variable en posant $X = \ln x$ et $Y = \ln y$.

Le système $\begin{cases} \ln x + \ln y = 4 \\ (\ln x)(\ln y) = -12 \end{cases}$ devient alors équivalent au système. $\begin{cases} X + Y = 4 & L_1 \\ XY = -12 & L_2 \end{cases}$

Par substitution, $\begin{cases} Y = 4 - X & L_1 \\ X(4 - X) = -12 & L_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Y = 4 - X & L_1 \\ -X^2 + 4X + 12 = 0 & L_2 \end{cases}$

On résout l'équation $-X^2 + 4X + 12 = 0 \Leftrightarrow X^2 - 4X - 12 = 0$ en calculant son discriminant $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times (-12) = 16 + 48 = 64$ d'où l'existence de deux solutions réelles distinctes

$$X_1 = \frac{-(-4) - \sqrt{64}}{2 \times 1} = \frac{-4}{2} = -2 \text{ et } X_2 = \frac{-(-4) + \sqrt{64}}{2} = \frac{12}{2} = 6.$$

A chaque valeur de X correspond une valeur de Y :

$$X_1 = -2 \Rightarrow Y_1 = 4 - X_1 = 4 - (-2) = 6 \text{ et } X_2 = 6 \Rightarrow Y_2 = 4 - X_2 = 4 - 6 = -2$$

Les solutions du système $\begin{cases} X + Y = 4 & L_1 \\ XY = -12 & L_2 \end{cases}$ sont $S = \{(6; -2); (-2; 6)\}$ (Comme X et Y jouent des rôles symétriques, on

peut considérer qu'il n'existe qu'une seule solution : 6 et -2)

On « revient aux inconnues x et y » :

$$X = 6 \Leftrightarrow \ln x = 6 \Leftrightarrow x = e^6 \text{ et } Y = -2 \Leftrightarrow \ln y = -2 \Leftrightarrow y = e^{-2},$$

$$\text{ou symétriquement } X = -2 \Leftrightarrow \ln x = -2 \Leftrightarrow x = e^{-2} \text{ et } Y = 6 \Leftrightarrow \ln y = 6 \Leftrightarrow y = e^6,$$

Finalement $S = \{(e^6; e^{-2}); (e^{-2}; e^6)\}$ ou de manière symétrique $S = \{(e^6; e^{-2})\}$

Exercice n°9

1) L'inéquation est définie si et seulement

$$\begin{cases} 2 + 5x > 0 \\ x + 6 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -\frac{2}{5} \\ x > -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in]-\frac{2}{5}; +\infty[\\ x \in]-6; +\infty[\end{cases} \Leftrightarrow x \in]-\frac{2}{5}; +\infty[\cap]-6; +\infty[=]-\frac{2}{5}; +\infty[$$

$$\text{Pour tout } x \in]-\frac{2}{5}; +\infty[, \ln(2 + 5x) \leq \ln(x + 6) \Leftrightarrow 2 + 5x \leq x + 6 \Leftrightarrow 4x \leq 4 \Leftrightarrow x \leq 1$$

$$\text{L'ensemble des solutions est donc } S =]-\frac{2}{5}; +\infty[\cap]-\infty; 1] =]-\frac{2}{5}; 1]$$

2) L'inéquation est définie si et seulement

$$\begin{cases} x - 1 > 0 \\ x - 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x > 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in]1; +\infty[\\ x \in]3; +\infty[\end{cases} \Leftrightarrow x \in]1; +\infty[\cap]3; +\infty[=]3; +\infty[$$

$$\text{Pour tout } x \in]3; +\infty[,$$

$$\ln(x-1) + \ln(x-3) < \ln(3) \Leftrightarrow \ln((x-1)(x-3)) < \ln(3) \text{ (car } \ln(a) + \ln(b) = \ln(a \times b))$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x-3) < 3 \Leftrightarrow x^2 - 4x < 0$$

$$\Leftrightarrow x(x-4) < 0 \Leftrightarrow x \in]0; 4[$$

L'ensemble des solutions est donc $S =]0; 4[\cap]3; +\infty[=]3; 4[$

3) L'inéquation est définie si et seulement $x \in]0; +\infty[$

$$\ln x \geq 2 \Leftrightarrow \ln x \geq 2 \times 1 \Leftrightarrow \ln x \geq 2 \times \ln e \text{ (car } \ln(e) = 1)$$

$$\Leftrightarrow \ln x \geq \ln(e^2) \text{ (car } n \ln(a) = \ln(a^n))$$

$$\Leftrightarrow x \geq e^2 \cdot S = [e^2; +\infty[$$

4) L'inéquation est définie si et seulement $x \in]0; +\infty[$. Puisque $x > 0$,

$$\frac{2(1 + \ln x)}{x} > 0 \Leftrightarrow 1 + \ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x > -1 \Leftrightarrow x > e^{-1} = \frac{1}{e} \cdot S = \left] \frac{1}{e}; +\infty \right[$$

5) L'inéquation est définie si et seulement $x \in]0; +\infty[$.

En posant $X = \ln x$, l'inéquation devient équivalente à l'inéquation du second degré $X^2 + X - 6 \leq 0$, que l'on sait résoudre : $X \in [-3; 2]$ En revenant à la variable x on a : $X \in [-3; 2] \Leftrightarrow -3 \leq \ln(x) \leq 2 \Leftrightarrow e^{-3} \leq x \leq e^2 \cdot S = [e^{-3}; e^2]$

6) L'inéquation est définie si et seulement $2x - 5 > 0 \Leftrightarrow x \in \left] \frac{5}{2}; +\infty \right[$

$$\ln(2x - 5) \geq 1 \Leftrightarrow \ln(2x - 5) \geq \ln(e) \Leftrightarrow 2x - 5 \geq e \Leftrightarrow x \geq \frac{e+5}{2}$$

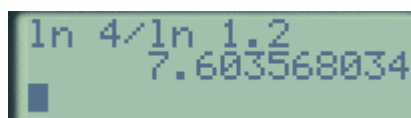
$$S = \left] \frac{5}{2}; +\infty \right[\cap \left[\frac{e+5}{2}; +\infty \right[= \left[\frac{e+5}{2}; +\infty \right[,$$

7) L'inéquation est définie sur $\mathbb{R}$.

$$(1,2)^n \geq 4 \Leftrightarrow \ln(1,2^n) \geq \ln(4)$$

$$\Leftrightarrow n \ln(1,2) \geq \ln(4) \text{ car } \ln(a^n) = n \ln(a)$$

$$\Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(4)}{\ln(1,2)} \text{ car } \ln(1,2) > 0$$



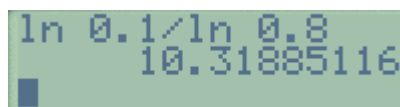
Si $n \in \mathbb{N}$, alors $n \geq 8$

8) L'inéquation est définie sur $\mathbb{R}$.

$$(0,8)^n \leq 0,1 \Leftrightarrow \ln(0,8^n) \geq \ln(0,1)$$

$$\Leftrightarrow n \ln(0,8) \leq \ln(0,1) \text{ car } \ln(a^n) = n \ln(a)$$

$$\Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(0,1)}{\ln(0,8)} \text{ car } \ln(0,8) < 0$$



Si $n \in \mathbb{N}$, alors $n \geq 11$

Exercice n°10

Le capital acquis au bout de n années s'élevant à $5000 \times \left(1 + \frac{6}{100}\right)^n = 5000 \times 1,06^n$, il suffit de résoudre l'inéquation

$$5000 \times 1,06^n \geq 12000 \Leftrightarrow 1,06^n \geq \frac{12000}{5000} \Leftrightarrow 1,06^n \geq 2,4$$

$$\Leftrightarrow \ln(1,06^n) \geq \ln(2,4) \Leftrightarrow \underbrace{n \ln(1,06)}_{\geq 0} \geq \ln(2,4) \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(2,4)}{\ln(1,06)} \approx 15,02$$

Puisque $n \in \mathbb{N}$, c'est au cours de la 15^{ème} année (donc au début de la 16^{ème} année) que le capital dépassera 12000 €

Exercice n°11

1) Etudions séparément les signes de $\ln x$ et $\ln x + 1$, puis résumons dans un tableau de signes

Pour $x \in]0; +\infty[$,

$$\ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ et } \ln x > 0 \Leftrightarrow x \in]1; +\infty[$$

$$\text{De plus } \ln x + 1 = 0 \Leftrightarrow \ln x = -1 \Leftrightarrow x = e^{-1} = \frac{1}{e} \text{ et } \ln x + 1 > 0 \Leftrightarrow \ln x > -1 \Leftrightarrow x > e^{-1} = \frac{1}{e} \quad \ln x > 0 \Leftrightarrow x \in]1; +\infty[$$

D'où le tableau de $A(x) = \ln x(\ln x + 1)$:

x	0	$e^{-1} = \frac{1}{e}$	1	$+\infty$
$\ln x$	—	—	0	+
$\ln x + 1$	—	0	+	+
$A(x) = \ln x(\ln x + 1)$	+	0	—	+

2) Etudions séparément les signes de $2x$ et $\ln(1-x)$, puis résumons dans un tableau de signes

Notons d'abord que l'expression n'est définie que si et seulement si $1-x > 0 \Leftrightarrow x < 1 \Leftrightarrow x \in]-\infty; 1[$

Pour $x \in]-\infty; 1[$,

$$2x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ et } 2x > 0 \Leftrightarrow x > 0$$

$$\text{De plus } \ln(1-x) = 0 \Leftrightarrow 1-x = 1 \Leftrightarrow x = 0 \text{ et } \ln(1-x) > 0 \Leftrightarrow 1-x > 1 \Leftrightarrow x < 0$$

D'où le tableau de $B(x) = 2x \ln(1-x)$:

x	$-\infty$	0	1
$2x$	—	0	+
$\ln(1-x)$	+	0	—
$B(x) = 2x \ln(1-x)$	—	0	—

3) Etudions séparément les signes de $-x^2$ et $\ln(x+1)$, puis résumons dans un tableau de signes

Notons d'abord que l'expression n'est définie que si et seulement si $x+1 > 0 \Leftrightarrow x > -1 \Leftrightarrow x \in]-1; +\infty[$

Pour tout $x \in]-1; +\infty[$, $-x^2 \leq 0$ et $-x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$$\text{De plus } \ln(x+1) = 0 \Leftrightarrow x+1 = 1 \Leftrightarrow x = 0 \text{ et } \ln(x+1) > 0 \Leftrightarrow x+1 > 1 \Leftrightarrow x > 0$$

D'où le tableau de $C(x) = -x^2 \ln(x+1)$:

x	-1	0	$+\infty$
$-x^2$	—	0	—
$\ln(x+1)$	—	0	+
$C(x) = -x^2 \ln(x+1)$	+	0	—

Exercice n°12

1) La fonction f sera définie pour toutes les valeurs de x pour lesquelles $x^2 + 3x - 4 > 0$

Si on note $P(x) = x^2 + 3x - 4$, on calcule son discriminant : $\Delta = 3^2 - 4 \times 1 \times (-4) = 25$, d'où l'existence de deux racines

réelles distinctes $x_1 = \frac{-3 - \sqrt{25}}{2 \times 1} = -4$ et $x_2 = \frac{-3 + \sqrt{25}}{2 \times 1} = 1$. D'après les règles de signe d'un trinôme, $x^2 + 3x - 4 > 0$ si et

seulement si $x \in]-\infty; -4[\cup]1; +\infty[$. Ainsi $D_f =]-\infty; -4[\cup]1; +\infty[$

2) La fonction f définie par $f(x) = \ln\left(\frac{4-x^2}{x}\right) = \ln\left(\frac{(2-x)(2+x)}{x}\right)$ existe pour toutes les valeurs de x pour lesquelles

$\frac{(2-x)(2+x)}{x} > 0$ (avec $x \neq 0$)

On dresse le tableau de signes de l'expression $A(x) = \frac{(2-x)(2+x)}{x}$

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
x	—	—	0	+	+
$2-x$	+	+	+	0	—
$2+x$	—	0	+	+	+
$A(x) = \frac{(2-x)(2+x)}{x}$	+	0	—	+	0

Ainsi $\frac{(2-x)(2+x)}{x} > 0 \Leftrightarrow]-\infty; -2[\cup]0; 2[$

On conclut $D_f =]-\infty; -2[\cup]0; 2[$

3) La fonction f définie par $f : x \rightarrow \ln(4-x^2) - \ln x$ existe pour toutes les valeurs de x pour lesquelles on a

simultanément $4-x^2 > 0$ et $x > 0$ (pour que les deux membres de la fonction soient bien définis)

Or $4-x^2 > 0 \Leftrightarrow x^2 < 4 \Leftrightarrow x \in]-2; 2[$.

Si on exige de plus que $x > 0$, alors $D_f =]-2; 2[\cap]0; +\infty[=]0; 2[$

4) La fonction f définie par $f : x \rightarrow \ln(x^2 - 4) - \ln(-x)$ existe pour toutes les valeurs de x pour lesquelles on a

simultanément $x^2 - 4 > 0$ et $-x > 0 \Leftrightarrow x < 0$ (pour que les deux membres de la fonction soient bien définis)

Or $x^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow x^2 > 4 \Leftrightarrow x \in]-\infty; -2[\cup]2; +\infty[$.

Si on exige de plus que $x < 0$, alors $D_f = (]-\infty; -2[\cup]2; +\infty[) \cap]-\infty; 0[=]-\infty; -2[$

Exercice n°13

1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$, donc par somme, $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + \ln x) = +\infty$

2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1-x = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$, donc par produit, $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1-x) \ln x = -\infty$

3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$ donc par soustraction, $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln 2 - 3 \ln x) = -\infty$

4) $\lim_{x \rightarrow 0} x - 4 = -4$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$ donc par somme $\lim_{x \rightarrow 0} (x - 4 + \ln x) = -\infty$

5) Puisque $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$, on pose $u = x^2$, et puisque $\lim_{u \rightarrow +\infty} \ln u = +\infty$ on conclut que $\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(x^2) = +\infty$

6) $\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0^+$ on conclut par quotient que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{x} = -\infty$

- 7) Puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$, nous sommes en présence d'une forme indéterminée « $\infty - \infty$ ». On transforme l'écriture : $x - \ln x = x \left(1 - \frac{\ln x}{x} \right)$. Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ (limite connue), on déduit successivement que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{\ln x}{x} \right) = 1$, puis par produit, que $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - \frac{\ln x}{x} \right) = +\infty$, c'est-à-dire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} x - \ln x = +\infty$.
- 8) Puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) = \ln(1) = 0$, nous sommes en présence d'une forme indéterminée « $\infty \times 0$ ». En posant $X = \frac{1}{x}$, puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} X = 0^+$, la limite cherchée devient $\lim_{X \rightarrow 0^+} \frac{1}{X} \ln(1 + X)$. Or un résultat du cours nous indique que $\lim_{X \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1 + X)}{X} = 1$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) = 1$.
- 9) En posant $X = 2x$, la limite cherchée devient $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 2x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \ln(1 + X)}{X}$. Et puisque $\lim_{X \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1 + X)}{X} = 1$, on conclut que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \ln(1 + X)}{X} = 2$, c'est-à-dire $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 2x)}{x} = 2$.

Exercice n°14

- 1) La fonction définie par $f(x) = -\frac{x}{2} + 1 + 2 \ln x$ est définie et dérivable sur $]0; +\infty[$ en tant que somme de fonctions qui le sont, et pour tout $x \in]0; +\infty[$, $f'(x) = -\frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{x} = -\frac{1}{2} + \frac{2}{x} = \frac{4-x}{2x}$.
- 2) La fonction définie par $f(x) = \frac{2 \ln x}{\ln 3}$ est définie et dérivable sur $]0; +\infty[$ et puisque pour tout $x \in]0; +\infty[$, $f(x) = \frac{2}{\ln 3} \ln x$, $f'(x) = \frac{2}{\ln 3} \times \frac{1}{x} = \frac{2}{x \ln 3}$.
- 3) La fonction définie par $f(x) = \ln(4-x) + \ln x$ est définie et dérivable sur $]0; +\infty[\cap]-\infty; 4[=]0; 4[$ et pour tout $x \in]0; 4[$, $f'(x) = \frac{-1}{4-x} + \frac{1}{x} = \frac{-x+4-x}{x(4-x)} = \frac{4-2x}{x(4-x)} = \frac{2(2-x)}{x(4-x)}$.
- 4) La fonction définie par $f(x) = x \ln x - x$ est définie et dérivable sur $]0; +\infty[$ en tant que produit de fonctions qui le sont. Puisque pour tout $x \in]0; +\infty[$, $x \ln x = u(x)v(x)$ où $u(x) = x \Rightarrow u'(x) = 1$ et $v(x) = \ln x \Rightarrow v'(x) = \frac{1}{x}$, on aura $f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) - 1 = 1 \times \ln x + x \times \frac{1}{x} - 1 = \ln x + 1 - 1 = \ln x$.
- 5) La fonction définie par $f(x) = x^2 \ln x$ est définie et dérivable sur $]0; +\infty[$ en tant que produit de fonctions qui le sont. Puisque pour tout $x \in]0; +\infty[$, $f(x) = u(x)v(x)$ où $u(x) = x^2 \Rightarrow u'(x) = 2x$ et $v(x) = \ln x \Rightarrow v'(x) = \frac{1}{x}$, on aura $f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = 2x \times \ln x + x^2 \times \frac{1}{x} = x(2 \ln x + 1)$.
- 6) La fonction définie par $f(x) = \ln(2x-5)$ est définie et dérivable sur $\left] \frac{5}{2}; +\infty \right[$ (car $X \rightarrow \ln X$ est définie et dérivable sur $]0; +\infty[$ et $2x-5 > 0 \Leftrightarrow x \in \left] \frac{5}{2}; +\infty \right[$). Puisque pour tout $x \in \left] \frac{5}{2}; +\infty \right[$, $f(x) = \ln(u(x))$ avec $u(x) = 2x-5 \Rightarrow u'(x) = 2$, on aura $f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{2}{2x-5}$.

7) La fonction définie par $f(x) = \ln(-3x+1)$ est définie et dérivable sur $]-\infty; \frac{1}{3}[$ (car $X \rightarrow \ln X$ est définie et dérivable sur $]0; +\infty[$ et $-3x+1 > 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty; \frac{1}{3}[$). Puisque pour tout $x \in]-\infty; \frac{1}{3}[$, $f(x) = \ln(u(x))$ avec

$$u(x) = -3x+1 \Rightarrow u'(x) = -3, \text{ on aura } f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{-3}{-3x+1}$$

8) La fonction définie par $f(x) = \ln(x^2+x+1)$ n'est définie que pour les valeurs de x pour lesquelles $x^2+x+1 > 0$. Si on note $P(x) = x^2+x+1$, le calcul de son discriminant fournit $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3 < 0$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2+x+1 > 0$, donc f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(u(x))$ avec

$$u(x) = x^2+x+1 \Rightarrow u'(x) = 2x+1. \text{ Ainsi } f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{2x+1}{x^2+x+1}$$

9) La fonction définie par $f(x) = \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$ n'est définie que pour les valeurs de x pour lesquelles $\frac{x-1}{x+1} > 0$. Si on note

$P(x) = \frac{x-1}{x+1}$, le tableau de signes de P est donné par :

Ainsi, f est définie sur $]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$x-1$	$-$	$-$	0	$+$
$x+1$	$-$	0	$+$	$+$
$P(x) = \frac{x-1}{x+1}$	$+$	$-$	0	$+$

Puisque P est dérivable sur $]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$, puisque pour tout $x \in]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$, $\frac{x-1}{x+1} > 0$ et puisque $X \rightarrow \ln X$ est définie et dérivable sur $]0; +\infty[$, on conclut que f sera dérivable sur $]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$

Pour tout $x \in]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$, puisque $f(x) = \ln(P(x))$, on aura $f'(x) = \frac{P'(x)}{P(x)}$. Puisque $P(x) = \frac{x-1}{x+1} = \frac{u(x)}{v(x)}$ où

$$u(x) = x-1 \Rightarrow u'(x) = 1 \text{ et } v(x) = x+1 \Rightarrow v'(x) = 1, \text{ on aura } P'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2} = \frac{1 \times (x+1) - (x-1) \times 1}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{2}{(x+1)^2} \text{ donc } f'(x) = \frac{\frac{2}{(x+1)^2}}{\frac{x-1}{x+1}} = \frac{2}{(x+1)^2} \times \frac{x+1}{x-1} = \frac{2}{(x+1)(x-1)}$$

10) La fonction définie par $f(x) = \ln(\ln x)$ n'est définie que pour les valeurs de x pour lesquelles $\ln x > 0$, c'est-à-dire

$D_f =]1; +\infty[$. Pour tout $x \in]1; +\infty[$, puisque $f(x) = \ln(u(x))$ où $u(x) = \ln x \Rightarrow u'(x) = \frac{1}{x}$ on aura

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{\frac{1}{x}}{\ln x} = \frac{1}{x \ln x}$$

11) La fonction définie par $f(x) = x \ln(2x-3)$ est définie et dérivable sur $]\frac{3}{2}; +\infty[$ en tant que produit de fonctions qui le sont (car $X \rightarrow \ln X$ est définie et dérivable sur $]0; +\infty[$ et $2x-3 > 0 \Leftrightarrow x \in]\frac{3}{2}; +\infty[$)

Puisque pour tout $x \in]\frac{3}{2}; +\infty[$, $f(x) = u(x)v(x)$ avec $u(x) = x \Rightarrow u'(x) = 1$ et $v(x) = \ln(2x-3) \Rightarrow v'(x) = \frac{2}{2x-3}$, on en

$$\text{déduit } f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = 1 \times \ln(2x-3) + x \times \frac{2}{2x-3} = \ln(2x-3) + \frac{2x}{2x-3} = \frac{(2x-3)\ln(2x-3) + 2x}{2x-3}$$

12) La fonction définie par $f(x) = 2x(1 - \ln x)$ est définie et dérivable sur $]0; +\infty[$ en tant que produit de fonctions qui le sont. Puisque pour tout $x \in]0; +\infty[$, $f(x) = u(x)v(x)$ avec $u(x) = 2x \Rightarrow u'(x) = 2$ et $v(x) = 1 - \ln x \Rightarrow v'(x) = -\frac{1}{x}$, on en déduit $f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = 2 \times (1 - \ln x) + 2x \times \left(-\frac{1}{x}\right) = 2 - 2\ln x - 2 \boxed{= -2\ln x}$

13) La fonction définie par $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ est définie et dérivable sur $]0; +\infty[$ en tant que quotient de fonctions qui le sont. Puisque pour tout $x \in]0; +\infty[$, $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ où $u(x) = \ln x \Rightarrow u'(x) = \frac{1}{x}$ et $v(x) = x \Rightarrow v'(x) = 1$, on aura

$$f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2} = \frac{\frac{1}{x} \times x - (\ln x) \times 1}{(x)^2} = \boxed{\frac{1 - \ln x}{x^2}}$$

14) La fonction définie par $f(x) = \frac{x - \ln x}{x^2}$ est définie et dérivable sur $]0; +\infty[$ en tant que quotient de fonctions qui le sont. Puisque pour tout $x \in]0; +\infty[$, $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ où $u(x) = x - \ln x \Rightarrow u'(x) = 1 - \frac{1}{x}$ et $v(x) = x^2 \Rightarrow v'(x) = 2x$

$$f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2} = \frac{\left(1 - \frac{1}{x}\right) \times x^2 - (x - \ln x) \times 2x}{(x^2)^2} = \frac{x^2 - x - 2x^2 + 2x \ln x}{x^4} = \frac{-x^2 - x + 2x \ln x}{x^4} = \boxed{\frac{2 \ln x - x - 1}{x^3}}$$

15) La fonction définie par $f(x) = (\ln x)^2 - 2\ln x - 4$ est définie et dérivable sur $]0; +\infty[$ en tant que somme et composée de fonctions qui le sont. Pour tout $x \in]0; +\infty[$, $f'(x) = 2(\ln x)^{2-1} \times \frac{1}{x} - 2 \times \frac{1}{x} = \frac{2 \ln x}{x} - \frac{2}{x} \boxed{= \frac{2(\ln x - 1)}{x}}$

16) La fonction définie par $f(x) = \ln x^2$ est définie et dérivable sur $] -\infty; 0[\cup]0; +\infty[$. En effet $x \rightarrow x^2$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, tandis que $X \rightarrow \ln(X)$ n'est définie et dérivable que sur $]0; +\infty[$. Or $x^2 \in]0; +\infty[\Leftrightarrow x \in] -\infty; 0[\cup]0; +\infty[$. Pour tout $x \in] -\infty; 0[\cup]0; +\infty[$, $f'(x) = \frac{2x}{x^2} = \boxed{\frac{2}{x}}$

17) La fonction définie par $f(x) = (\ln x)^2$ est définie et dérivable sur $]0; +\infty[$ en tant que composée de fonctions qui le sont. En effet $x \rightarrow \ln x$ est définie et dérivable sur $]0; +\infty[$, tandis que $X \rightarrow X^2$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout $x \in]0; +\infty[$, $f'(x) = 2(\ln x)^{2-1} \times \frac{1}{x} \boxed{= \frac{2 \ln x}{x}}$

18) La fonction définie par $f(x) = \ln|1 - x^2|$ est définie et dérivable pour toutes les valeurs de x telles que $1 - x^2 \neq 0 \Leftrightarrow x \in] -\infty; -1[\cup]-1; 1[\cup]1; +\infty[$. Selon la valeur de x , l'expression de $f(x)$ n'est pas la même.

Pour tout $x \in] -\infty; -1[\cup]1; +\infty[$, $1 - x^2 < 0$ donc $|1 - x^2| = x^2 - 1$ et par suite $f(x) = \ln(x^2 - 1)$. Alors $f'(x) = \frac{2x}{x^2 - 1}$

Pour tout $x \in]-1; 1[$, $1 - x^2 > 0$ donc $|1 - x^2| = 1 - x^2$ et par suite $f(x) = \ln(1 - x^2)$. Alors $f'(x) = \frac{-2x}{1 - x^2} = \frac{2x}{x^2 - 1}$

Ainsi, on peut affirmer que pour tout $x \in] -\infty; -1[\cup]1; +\infty[$, $\boxed{f'(x) = \frac{2x}{x^2 - 1}}$

Exercice n°15

1) $f(2) = 0$ se traduit par l'équation $\ln(2a + b) = 0 \Leftrightarrow 2a + b = 1$

De plus $f'(x) = \frac{a}{ax + b}$ donc $f'(3) = \frac{3}{4}$ se traduit par $\frac{a}{3a + b} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow 4a = 3(3a + b) \Leftrightarrow 5a + 3b = 0$

On doit résoudre le système $\begin{cases} 2a + b = 1 & L_1 \\ 5a + 3b = 0 & L_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6a + 3b = 3 & 3L_1 \\ 5a + 3b = 0 & L_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 & 3L_1 - L_2 \\ b = -5 & L_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 & 3L_1 - L_2 \\ b = -5 & L_2 \end{cases}$

Ainsi, $f(x) = \ln(3x - 5)$, qui est définie si et seulement si $3x - 5 > 0 \Leftrightarrow x \in \left] \frac{5}{3}; +\infty \right[$. Ainsi $D_f = \left] \frac{5}{3}; +\infty \right[$

La fonction f est la composée de deux fonctions strictement croissantes donc est strictement croissante sur $\left] \frac{5}{3}; +\infty \right[$

2) La courbe C passe par le point $A(2; 0)$ implique $f(2) = 0 \Leftrightarrow \ln(2a + b) = 0 \Leftrightarrow 2a + b = 1$. La tangente en A ait pour coefficient directeur -2 implique $f'(2) = -2$, c'est-à-dire $\frac{a}{2a+b} = -2 \Leftrightarrow a = -2(2a+b) \Leftrightarrow 5a + 2b = 0$. On doit

$$\text{résoudre : } \begin{cases} 2a + b = 1 & L_1 \\ 5a + 2b = 0 & L_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a + 2b = 2 & 2L_1 \\ 5a + 2b = 0 & L_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a = 2 & 2L_1 - L_1 \\ b = \frac{-5a}{2} & L_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 & 2L_1 - L_1 \\ b = 5 & L_2 \end{cases}$$

Ainsi, $f(x) = \ln(-2x + 5)$

Exercice n°16

Partie I

1) g est définie et dérivable sur $]0; +\infty[$ en tant que somme de fonctions qui le sont, et pour tout $x \in]0; +\infty[$,

$$g'(x) = 2x - 2 \times \frac{1}{x} = \frac{2x^2 - 2}{x} = \frac{2(x^2 - 1)}{x} = \frac{2(x-1)(x+1)}{x}$$

Puisque $x > 0$, le signe de $g'(x)$ sera donné par le signe de $(x-1)(x+1)$, expression dont les racines sont -1 et 1

Ainsi, pour $x \in]0; 1[$, $g'(x) < 0$ donc g est strictement décroissante sur $]0; 1[$, et pour tout $x \in]1; +\infty[$, $g'(x) > 0$ donc g est strictement croissante sur $]1; +\infty[$

2) Sur $]0; +\infty[$, g atteint donc son minimum lorsque $x = 1$, et comme $g(1) = 1^2 - 2 \times \frac{\ln 1}{1} = 1$, on peut affirmer que pour

tout $x \in]0; +\infty[$, $g(x) > 0$

Partie II

1) Puisque $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \ln x = -\infty$, on en déduit par quotient et somme, que $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = -\infty$. La droite d'équation $x = 0$ (c'est-

à-dire l'axe des ordonnées) est donc asymptote verticale à la courbe (C)

2) On transforme l'écriture de $f(x)$: Pour tout $x \in]0; +\infty[$, $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x}$

En utilisant la limite de croissance comparée $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ et puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2} = +\infty$, on déduit par somme

que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. De plus, pour tout $x \in]0; +\infty[$, $f(x) - \frac{x}{2} = \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x}$, et puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$,

on aura donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(f(x) - \frac{x}{2} \right) = 0$. La droite (Δ) d'équation $y = \frac{x}{2}$ est asymptote oblique à (C) en $+\infty$.

Pour connaître la position relative de (C) et (Δ) , on étudie le signe de la différence $f(x) - \frac{x}{2} = \frac{1 + \ln x}{x}$. Or

$$f(x) - \frac{x}{2} = 0 \Leftrightarrow 1 + \ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{e} = e^{-1} \text{ et } f(x) - \frac{x}{2} > 0 \Leftrightarrow 1 + \ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x > -1 \Leftrightarrow x > \frac{1}{e} = e^{-1}$$

Ainsi (C) et (Δ) sont sécantes au point A d'abscisse $\frac{1}{e} = e^{-1}$ et d'ordonnée $f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{2e}$

De plus, sur $\left] 0; \frac{1}{e} \right[$, (C) est en dessous de (Δ) , et sur $\left] \frac{1}{e}; +\infty \right[$, (C) est au dessus de (Δ) .

3) f est définie et dérivable sur $]0; +\infty[$ en tant que somme et quotient de fonctions qui le sont, et pour tout $x \in]0; +\infty[$,

$$f'(x) = \frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{x} \times x - (1 + \ln x) \times 1}{x^2} = \frac{1}{2} - \frac{\ln x}{x^2} = \frac{1}{2x^2} (x^2 - 2 \ln x) = \frac{1}{2x^2} g(x)$$

Puisque pour tout $x \in]0; +\infty[$, $\frac{1}{2x^2} > 0$ et $g'(x) > 0$ (question 2 de la partie 1), on conclut que pour tout $x \in]0; +\infty[$,

$f'(x) > 0$, donc que f est strictement croissante sur $]0; +\infty[$

Le tableau de variations de f est donc :

x	0	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

4) La droite (Δ) a un coefficient directeur égal à $\frac{1}{2}$

Le coefficient directeur de la tangente (T) en un point d'abscisse a est égal à $f'(a) = \frac{1}{2} - \frac{\ln a}{a^2}$

La tangente (T) sera parallèle à (Δ) si et seulement si ces deux droites ont même coefficient directeur, donc si et

seulement si $f'(a) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\ln a}{a^2} = 0 \Leftrightarrow \ln a = 0 \Leftrightarrow a = 1$. C'est donc au point B d'abscisse 1 et d'ordonnée $f(1) = \frac{3}{2}$

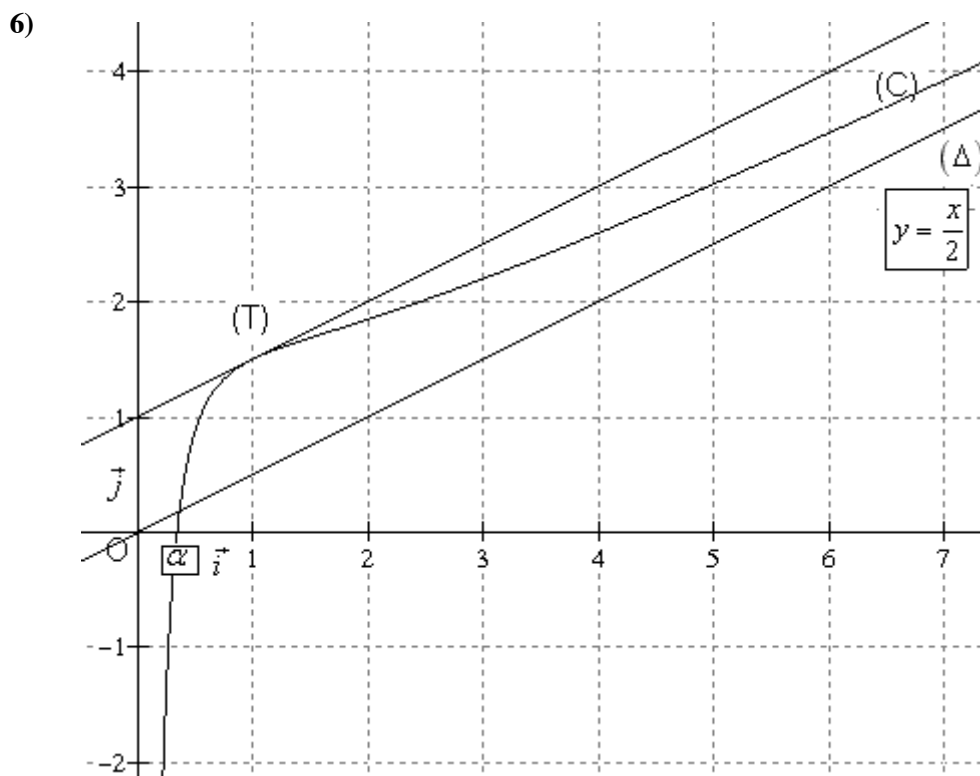
que la tangente (T) sera parallèle à (Δ)

5) Sur $]0; +\infty[$, f est continue en tant que somme et quotient de fonctions qui le sont. De plus elle est strictement croissante sur $]0; +\infty[$. Enfin, puisque $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, on a $0 \in \left[\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right]$. Le

théorème de la valeur intermédiaire affirme donc l'existence d'une valeur α telle que $f(\alpha) = 0$. Par définition,

$f(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \frac{\alpha}{2} + \frac{1 + \ln \alpha}{\alpha} = 0 \Leftrightarrow \ln \alpha = -\frac{\alpha^2}{2} - 1$. Le coefficient directeur de la tangente à (C) au point d'abscisse α

est égal à : $f'(\alpha) = \frac{1}{2} - \frac{\ln \alpha}{\alpha^2} = \frac{1}{2} - \frac{\left(-\frac{\alpha^2}{2} - 1\right)}{\alpha^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{\alpha^2} = 1 + \frac{1}{\alpha^2} > 1$. Ce coefficient est donc supérieur à 1



Exercice n°17

Partie I

1) f est définie et dérivable sur $]0; +\infty[$ en tant que somme et fonctions qui le sont, et pour tout $x \in]0; +\infty[$, $f'(x) = 1 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{x} = 1 + \frac{1}{2x}$. Mais comme $x \in]0; +\infty[$, on aura $1 + \frac{1}{2x} > 0 \Leftrightarrow f'(x) > 0$. f est donc strictement croissante sur $]0; +\infty[$. De plus $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \ln x = -\infty$ donc $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = -\infty$.

Enfin, pour tout $x \in]0; +\infty[$, $f(x) = x \left(1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{2} \times \frac{\ln x}{x} \right)$. Par croissance comparée, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$, et puisque

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$, on conclut, par différence et produits que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Le tableau de variations de f est donc :

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		
	$-\infty$	$+\infty$

2) Sur l'intervalle $]0; +\infty[$, f est continue et strictement croissante. De plus $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Comme $0 \in \left] \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right[$, le **théorème de la valeur intermédiaire** affirme l'existence d'une unique solution

l à l'équation $f(x) = 0$. Grâce à la calculatrice, on peut dresser un tableau de valeurs de f sur $]0; +\infty[$. Puisque $f(1) < 0$ et $f(2) > 0$, on peut affirmer que $l \in]1; 2[$, donc $l=1$.

X	Y1
0	ERROR
1	-1
2	3.4657
3	1.5493
4	2.6931
5	3.8047

3) Puisque f est strictement croissante sur $]0; +\infty[$, pour tout $x \in]0; l[$, $f(x) < f(l)$, c'est-à-dire $f(x) < 0$, et pour tout $x \in]l; +\infty[$, $f(x) > f(l)$, c'est-à-dire $f(x) > 0$.

Partie II

1) On utilise la limite de croissance comparée $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^2 \ln x = 0$ pour conclure, par somme, que $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} g(x) = 0 = g(0)$,

donc que g est continue en 0. Pour tout $x \in]0; +\infty[$, $g(x) = x^2 \left(-\frac{7}{8} + \frac{1}{x} - \frac{1}{4} \ln x \right)$. Puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ et

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{7}{8} + \frac{1}{x} - \frac{1}{4} \ln x = -\infty$, et puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$, on conclut par produit que

$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$

2) g est dérivable sur $]0; +\infty[$ en tant que somme et produits de fonctions qui le sont, et pour tout $x > 0$, $g'(x) = -\frac{7}{8} \times 2x + 1 - \frac{1}{4} (u'(x)v(x) + u(x)v'(x))$ où $u(x) = x^2 \Rightarrow u'(x) = 2x$ et $v(x) = \ln x \Rightarrow v'(x) = \frac{1}{x}$.

Ainsi $g'(x) = -\frac{7}{4}x + 1 - \frac{1}{4} \left(2x \ln x + x^2 \times \frac{1}{x} \right) = -\frac{7}{4}x + 1 - \frac{x \ln x}{2} - \frac{1}{4}x = -2x + 1 - \frac{1}{2}x \ln x$

On calcule par ailleurs $xf\left(\frac{1}{x}\right) = x \left(\frac{1}{x} - 2 + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1}{x} \right) \right) = x \left(\frac{1}{x} - 2 - \frac{1}{2} \ln(x) \right) = 1 - 2x - \frac{1}{2}x \ln x$

On a bien l'égalité $g'(x) = xf\left(\frac{1}{x}\right)$

3) On calcule $g\left(\frac{1}{l}\right) = -\frac{7}{8} \left(\frac{1}{l} \right)^2 + \frac{1}{l} - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{l} \right)^2 \ln \frac{1}{l} = -\frac{7}{8l^2} + \frac{1}{l} + \frac{1}{4l^2} \ln l$

Or par définition $f(l) = 0 \Leftrightarrow l - 2 + \frac{1}{2} \ln l = 0 \Leftrightarrow \ln l = 2(2 - l)$. On remplace donc dans le calcul de $g\left(\frac{1}{l}\right)$:

$$g\left(\frac{1}{l}\right) = -\frac{7}{8l^2} + \frac{1}{l} + \frac{1}{4l^2}(2(2-l)) = -\frac{7}{8l^2} + \frac{1}{l} + \frac{4-2l}{4l^2} = \frac{-7+8l+2(4-2l)}{8l^2} = \frac{1+4l}{8l^2}, \text{ d'où l'égalité demandée.}$$

Pour tout $x > 0$, $g'(x)$ aura le même signe que $f\left(\frac{1}{x}\right)$. Ainsi :

Si $x \in \left]0; \frac{1}{l}\right[$, on aura $\frac{1}{x} > l$ donc $f\left(\frac{1}{x}\right) > 0$ et par suite $g'(x) > 0$.

Si $x \in \left]\frac{1}{l}; +\infty\right[$, on aura $\frac{1}{x} < l$ donc $f\left(\frac{1}{x}\right) < 0$ et par suite $g'(x) < 0$. Enfin $g'\left(\frac{1}{l}\right) = \frac{1}{l} f(l) = 0$

La fonction g est donc strictement croissante sur $\left]0; \frac{1}{l}\right[$ et strictement décroissante sur $\left]\frac{1}{l}; +\infty\right[$

Son tableau de variations est donc :

x	0	$\frac{1}{l}$	$+\infty$
$g(x)$		$g\left(\frac{1}{l}\right) = \frac{1+4l}{8l^2}$	
	0		$-\infty$

4) Une équation de la tangente à la courbe Γ représentative de g au point d'abscisse 1 est $y = g'(1)(x-1) + g(1)$. Or

$g'(1) = 1 \times f\left(\frac{1}{1}\right) = f(1) = -1$ et $g(1) = \frac{1}{8}$. Ainsi une équation de la tangente à la courbe Γ représentative de g au

point d'abscisse 1 est $y = -(x-1) + \frac{1}{8} = -x + \frac{9}{8}$. Une équation de la tangente à la courbe Γ représentative de g au

point d'abscisse l est $y = g'(l)(x-l) + g(l)$. Or $g'(l) = 0$ et $g\left(\frac{1}{l}\right) = \frac{1+4l}{8l^2}$. Ainsi une équation de la tangente à la

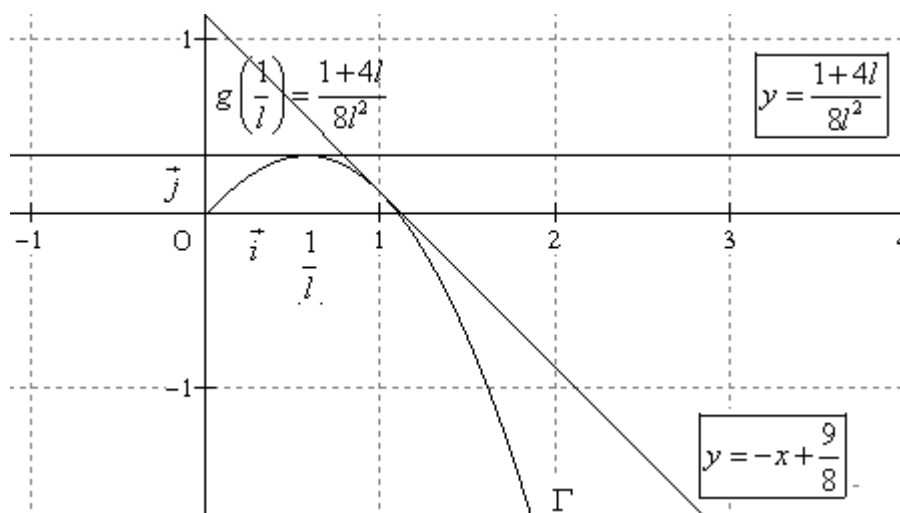
courbe Γ représentative de g au point d'abscisse l est $y = \frac{1+4l}{8l^2}$

En reprenant l'écriture $g'(x) = -2x + 1 - \frac{1}{2}x \ln x$, et en utilisant la limite de croissance comparée $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x \ln x = 0$, on

conclut par somme que $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} g'(x) = 1$. Graphiquement, cela signifie que Γ admet en O une demi tangente parallèle à la

première bissectrice.

5)



Exercice n°18

1) $f(x) = x^2 - 5x + \frac{1}{x}$. f est continue sur $]0; +\infty[$ en tant que somme de fonctions qui le sont, donc admet des primitives sur $]0; +\infty[$, et pour tout $x \in]0; +\infty[$,
$$F(x) = \frac{x^3}{3} - 5\frac{x^2}{2} + \ln(|x|) = \frac{x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + \ln(x)$$
 puisque $x \in]0; +\infty[$

2) $f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x}$. f est continue sur $]0; +\infty[$ en tant que quotient de fonctions qui le sont, le dénominateur ne s'annulant pas, donc admet des primitives sur $]0; +\infty[$, et pour tout $x \in]0; +\infty[$, puisque $f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x} = x + 1 + \frac{1}{x}$,
$$F(x) = \frac{x^2}{2} + x + \ln(|x|) = \frac{x^2}{2} + x + \ln(x)$$
 puisque $x \in]0; +\infty[$

3) $f(x) = \frac{7}{x} + \frac{5}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2}$. f est continue sur $]0; +\infty[$ en tant que quotient de fonctions qui le sont, donc admet des primitives sur $]0; +\infty[$, et pour tout $x \in]0; +\infty[$,
$$F(x) = 7 \ln(|x|) + 5 \times 2\sqrt{x} - \frac{1}{x} = 7 \ln(x) + 10\sqrt{x} - \frac{1}{x}$$
, car $x \in]0; +\infty[$

4) $f(x) = \frac{3}{3x-4}$. f est continue sur $\left] \frac{4}{3}; +\infty \right[$ en tant que quotient de fonctions qui le sont, le dénominateur ne s'annulant pas, donc admet des primitives sur $\left] \frac{4}{3}; +\infty \right[$, et puisque $f(x) = \frac{3}{3x-4} = \frac{u'(x)}{u(x)}$ où $u(x) = 3x-4 \Rightarrow u'(x) = 3$,
$$F(x) = \ln(|u(x)|) = \ln(|3x-4|) = \ln(3x-4)$$
 car $x \in \left] \frac{4}{3}; +\infty \right[$

5) $f(x) = \frac{1}{x+1}$. f est continue sur $] -1; +\infty[$ en tant que quotient de fonctions qui le sont, le dénominateur ne s'annulant pas, donc admet des primitives sur $] -1; +\infty[$, et puisque $f(x) = \frac{1}{x+1} = \frac{u'(x)}{u(x)}$ où $u(x) = x+1 \Rightarrow u'(x) = 1$,
$$F(x) = \ln(|u(x)|) = \ln(|x+1|) = \ln(x+1)$$
 car $x \in] -1; +\infty[$

6) Si $x \in] -\infty; -1[$,
$$F(x) = \ln(|x+1|) = \ln(-(x+1)) = \ln(-x-1)$$

7) $f(x) = \frac{2x}{x^2-4}$. f est continue sur $]2; +\infty[$ en tant que quotient de fonctions qui le sont, le dénominateur ne s'annulant pas, donc admet des primitives sur $]2; +\infty[$, et puisque $f(x) = \frac{2x}{x^2-4} = \frac{u'(x)}{u(x)}$ où $u(x) = x^2-4 \Rightarrow u'(x) = 2x$,
$$F(x) = \ln(|u(x)|) = \ln(|x^2-4|) = \ln(x^2-4)$$
 car $x \in]2; +\infty[$

8) $f(x) = \frac{1}{3x-5}$ sur $[2; +\infty[$. f est continue sur $[2; +\infty[$ en tant que quotient de fonctions qui le sont, le dénominateur ne s'annulant pas, donc admet des primitives sur $[2; +\infty[$, et pour tout $x \in [2; +\infty[$, puisque $f(x) = \frac{1}{3} \times \frac{3}{3x-5} = \frac{1}{3} \times \frac{u'(x)}{u(x)}$, ou $u(x) = 3x-5 \Rightarrow u'(x) = 3$,
$$F(x) = \frac{1}{3} \ln(|3x-5|) = \frac{1}{3} \ln(3x-5)$$
 car $x \in [2; +\infty[$

9) $f(x) = \frac{x+1}{x^2+2x+2}$ sur $\mathbb{R}$. f est continue sur $\mathbb{R}$ en tant que quotient de fonctions qui le sont, le dénominateur ne s'annulant pas, (le discriminant du trinôme x^2+2x+2 est strictement négatif) donc admet des primitives sur $\mathbb{R}$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$, puisque $f(x) = \frac{x+1}{x^2+2x+2} = \frac{1}{2} \times \frac{u'(x)}{u(x)}$, ou $u(x) = x^2+2x+2 \Rightarrow u'(x) = 2x+2$,

$$F(x) = \frac{1}{2} \ln(|u(x)|) = \frac{1}{2} \ln(|x^2+2x+2|) = \frac{1}{2} \ln(x^2+2x+2), \text{ puisque } x \in \mathbb{R} \Rightarrow x^2+2x+2 > 0$$

10) $f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$ sur $] -1; 1[$. f est continue sur $] -1; 1[$ en tant que quotient de fonctions qui le sont, le dénominateur ne s'annulant pas, donc admet des primitives sur $] -1; 1[$, et pour tout $x \in] -1; 1[$, puisque

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 1} = \frac{1}{2} \frac{2x}{x^2 - 1} = \frac{1}{2} \frac{u'(x)}{u(x)}, \text{ où } u(x) = x^2 - 1 \Rightarrow u'(x) = 2x, \quad \boxed{F(x) = \frac{1}{2} \ln(|u(x)|) = \frac{1}{2} \ln(|x^2 - 1|) = \frac{1}{2} \ln(1 - x^2)}$$

puisque $x \in] -1; 1[\Rightarrow 1 - x^2 < 0$

Exercice n°19

1) Pour tout $x \in [4; +\infty[$, $ax + b + \frac{c}{x-2} = \frac{(ax+b)(x-2)+c}{x-2} = \frac{ax^2 + (b-2a)x - 2b+c}{x-2}$

Ainsi $ax + b + \frac{c}{x-2} = f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b - 2a = -3 \\ -2b + c = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -3 + 4 = 1 \\ c = -4 + 2 = -2 \end{cases}$. Pour tout $x \in [4; +\infty[$, $\boxed{f(x) = 2x + 1 + \frac{-2}{x-2}}$

2) f est définie et continue sur $[4; +\infty[$ en tant que somme et quotient de fonctions qui le sont, le dénominateur ne s'annulant pas, donc admet des primitives sur $[4; +\infty[$. A partir de l'écriture $f(x) = 2x + 1 + \frac{-2}{x-2}$, on déduit l'expression d'une primitive F de f sur $[4; +\infty[$: $\boxed{F(x) = x^2 + x - 2 \ln(|x-2|) = x^2 + x - 2 \ln(x-2)}$ car $x \in [4; +\infty[\Rightarrow x-2 > 0$

Exercice n°20

1) $f(x) = \frac{\cos x}{\sin x}$. f est définie et continue sur $]0; \frac{\pi}{2}[$ en tant que quotient de fonctions qui le sont, le dénominateur ne s'annulant pas, donc admet des primitives sur $]0; \frac{\pi}{2}[$, et pour tout $x \in]0; \frac{\pi}{2}[$, puisque $f(x) = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{u'(x)}{u(x)}$, ou $u(x) = \sin x \Rightarrow u'(x) = \cos x$, $\boxed{F(x) = \ln(|u(x)|) = \ln(|\sin x|) = \ln(\sin x)}$, puisque $x \in]0; \frac{\pi}{2}[\Rightarrow \sin x > 0$.

2) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$. f est définie et continue sur $[1; +\infty[$ en tant que quotient de fonctions qui le sont, le dénominateur ne s'annulant pas, donc admet des primitives sur $[1; +\infty[$, et pour tout $x \in [1; +\infty[$, puisque

$$f(x) = \frac{1}{x} \times \ln x = u'(x) \times u(x), \text{ ou } u(x) = \ln x \Rightarrow u'(x) = \frac{1}{x}, \quad \boxed{F(x) = \frac{(u(x))^2}{2} = \frac{(\ln(x))^2}{2}}$$

3) $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$. f définie est continue sur $]1; +\infty[$ en tant que quotient de fonctions qui le sont, le dénominateur ne s'annulant pas, donc admet des primitives sur $]1; +\infty[$, et pour tout $x \in]1; +\infty[$, puisque $f(x) = \frac{1/x}{\ln x} = \frac{u'(x)}{u(x)}$, ou $u(x) = \ln x \Rightarrow u'(x) = \frac{1}{x}$, $\boxed{F(x) = \ln(|u(x)|) = \ln(|\ln(x)|) = \ln(\ln(x))}$ car $x \in]1; +\infty[\Rightarrow \ln x > 0$

4) $f(x) = \tan x$. f définie est continue sur $\left] \frac{\pi}{2}; \pi \right]$ en tant que quotient de fonctions qui le sont, le dénominateur ne s'annulant pas, donc admet des primitives sur $\left] \frac{\pi}{2}; \pi \right]$, et pour tout $x \in \left] \frac{\pi}{2}; \pi \right]$, puisque $f(x) = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{-u'(x)}{u(x)}$, ou $u(x) = \cos x \Rightarrow u'(x) = -\sin x$, $\boxed{F(x) = -\ln(|u(x)|) = -\ln(|\cos x|) = -\ln(-\cos x)}$, puisque $x \in \left] \frac{\pi}{2}; \pi \right] \Rightarrow \cos x < 0$.

Exercice n°21

1) $\int_0^2 \frac{dx}{x+1} = F(2) - F(0)$ où F est une primitive de $f(x) = \frac{1}{x+1} = \frac{u'(x)}{u(x)}$ donc $F(x) = \ln(|u(x)|) = \ln(|x+1|)$.

Comme pour tout $x \in [0; 2]$, $x+1 > 0$, on aura $F(x) = \ln(x+1)$ donc $\int_0^2 \frac{dx}{x+1} = \ln(3) - \ln(0+1) = \ln 3$

2) $\int_{-4}^{-3} \frac{3}{x+2} dx = F(-3) - F(-4)$ où F est une primitive de $f(x) = \frac{3}{x+2} = \frac{3u'(x)}{u(x)}$ donc

$F(x) = 3 \ln(|u(x)|) = 3 \ln(|x+2|)$. Comme pour tout $x \in [-4; -3]$, $x+2 < 0$, on aura

$F(x) = 3 \ln(-(x+2)) = 3 \ln(-x-2)$ donc $\int_{-4}^{-3} \frac{3}{x+2} dx = 3 \ln(-(-3)-2) - 3 \ln(-(-4)-2) = 3 \ln 1 - 3 \ln(2) = -3 \ln 2$

3) $\int_{-2}^0 \frac{4}{1-5x} dx = F(0) - F(-2)$ où F est une primitive de $f(x) = \frac{4}{1-5x} = -\frac{4}{5} \times \frac{u'(x)}{u(x)}$ donc

$F(x) = -\frac{4}{5} \times \ln(|u(x)|) = -\frac{4}{5} \times \ln(|1-5x|)$. Comme pour tout $x \in [-2; 0]$, $1-5x > 0$, on aura

$F(x) = -\frac{4}{5} \times \ln(1-5x)$ donc $\int_{-2}^0 \frac{4}{1-5x} dx = -\frac{4}{5} \times \ln(1-5 \times 0) - \left(-\frac{4}{5} \times \ln(1-5 \times (-2)) \right) = -\frac{4}{5} + \frac{4}{5} \ln(11)$

4) $\int_1^2 \frac{x^2+x-2}{x^2} dx = \int_1^2 \left(1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} \right) dx = \left[x + \ln(|x|) + \frac{2}{x} \right]_1^2 = 2 + \ln(2) + \frac{2}{2} - \left(1 + \ln(1) + \frac{2}{1} \right) = \ln 2$

5) $\int_3^4 \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2-x} - \frac{4}{x+2} \right) dx = \left[\frac{1}{4}x + \ln(|2-x|) - 4 \ln(|x+2|) \right]_3^4$
 $= \left(\frac{1}{4} \times 4 + \ln(|2-4|) - 4 \ln(|4+2|) \right) - \left(\frac{1}{4} \times 3 + \ln(|2-3|) - 4 \ln(|3+2|) \right) = \frac{1}{4} - 4 \ln(3) + 3 \ln 2$

6) $\int_1^e \frac{\ln x}{x} dx = \int_1^e u'(x) u(x) dx = \left[\frac{u^2(x)}{2} \right]_1^e = \left[\frac{(\ln x)^2}{2} \right]_1^e = \frac{(\ln e)^2}{2} - \frac{(\ln 1)^2}{2} = \frac{1}{2}$

7) $\int_{-1}^0 \frac{\ln(1-x)}{x-1} dx = \int_{-1}^0 \frac{1}{x-1} \ln(1-x) dx = \int_{-1}^0 -u'(x) u(x) dx = - \left[\frac{u(x)^2}{2} \right]_{-1}^0 = - \left[\frac{(\ln(1-x))^2}{2} \right]_{-1}^0$
 $= - \frac{(\ln(1-0))^2}{2} + \frac{(\ln(2))^2}{2} = \frac{(\ln(2))^2}{2}$

Exercice n°22

1) Pour tout x de $]1; +\infty[$, $x+4 + \frac{3}{x-1} = \frac{(x+4)(x-1)+3}{x-1} = \frac{x^2-x+4x-4+3}{x-1} = \frac{x^2+3x-1}{x-1} = f(x)$

2) Pour calculer l'intégrale $\int_4^2 \frac{x^2+3x-1}{x-1} dx$, on utilise la transformation d'écriture précédente. Ainsi

$\int_4^2 \frac{x^2+3x-1}{x-1} dx = \int_4^2 \left(x+4 + \frac{3}{x-1} \right) dx = \left[\frac{x^2}{2} + 4x + 3 \ln|x-1| \right]_4^2 = \left[\frac{x^2}{2} + 4x + 3 \ln(x-1) \right]_4^2$ car pour tout $x \in [2, 4]$,

$x-1 > 0$. On conclut $\int_4^2 \frac{x^2+3x-1}{x-1} dx = \frac{2^2}{2} + 8 + 3 \ln(2-1) - \left(\frac{4^2}{2} + 16 + 3 \ln(4-1) \right) = -14 + 3 \ln(1) - 3 \ln 3 = -14 - 3 \ln 3$

Exercice n°23

1) Pour tout x de $\left]-\frac{2}{3}; +\infty\right[$, $ax+b-\frac{c}{3x+2} = \frac{(ax+b)(3x+2)-c}{3x+2} = \frac{3ax^2+(2a+3b)x+2b-c}{3x+2} = f(x)$ si et seulement si $\begin{cases} 3a=6 \\ 2a+3b=13 \\ 2b-c=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ 3b=13-2\times 2 \\ c=2b-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=3 \\ c=2 \end{cases}$. Ainsi, pour tout x de $\left]-\frac{2}{3}; +\infty\right[$, $f(x) = 2x+3-\frac{2}{3x+2}$

2) Pour calculer $\int_0^2 \frac{6x^2+13x+4}{3x+2} dx$, on utilise la transformation d'écriture ci-dessus

$$\begin{aligned} \int_0^2 \frac{6x^2+13x+4}{3x+2} dx &= \int_0^2 \left(2x+3-\frac{2}{3x+2} \right) dx = \left[x^2+3x-\frac{2}{3} \ln(|3x+2|) \right]_0^2 \\ &= 2^2+3\times 2-\frac{2}{3} \ln(|3\times 2+2|) - \left(0^2+3\times 0-\frac{2}{3} \ln(|3\times 0+2|) \right) = 10-\frac{2}{3} \ln 8 + \frac{2}{3} \ln 2 = 10+\frac{2}{3} \ln \frac{2}{8} \end{aligned}$$

Exercice n°24

1) g est définie et dérivable sur $]0; +\infty[$ en tant que produit de fonctions qui le sont, et pour tout $x \in]0; +\infty[$, $g'(x) = 1 \times \ln x + x \times \frac{1}{x} - 1 = \ln x + 1 - 1 = \ln x$. g est donc une primitive de la fonction $\ln$ sur $]0; +\infty[$

2) On en déduit donc que $\int_1^e \ln x dx = [g(x)]_1^e = [x \ln x - x]_1^e = e \ln e - e - (\ln 1 - 1) = 1$

Exercice n°25

$I = \int_1^e x \ln x dx = \int_1^e u(x) v'(x) dx$ où $u(x) = \ln x \Rightarrow u'(x) = \frac{1}{x}$ et $v'(x) = x \Rightarrow v(x) = \frac{x^2}{2}$ sont continûment dérivables.

D'après la formule d'intégration par parties,

$$I = [u(x)v(x)]_1^e - \int_1^e u'(x)v(x) dx = \left[\frac{x^2}{2} \ln x \right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{x} \times \frac{x^2}{2} dx = \frac{e^2}{2} \ln e - \frac{1^2}{2} \ln 1 - \left[\frac{x^2}{4} \right]_1^e = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{e^2+1}{4}$$

Exercice n°26

1) En réduisant au même dénominateur : Pour tout t strictement positif,

$$\frac{at^{n-1}+b}{t^n+1} + \frac{c}{t} = \frac{t(at^{n-1}+b)+c(t^n+1)}{t(t^n+1)} = \frac{(a+c)t^n+bt+c}{t(t^n+1)} = \frac{1}{t(t^n+1)}, \text{ si et seulement si, par identification,}$$

$$\begin{cases} a+c=0 \\ b=0 \\ c=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=0 \\ c=1 \end{cases}. \text{ Ainsi, pour tout } t \text{ strictement positif, } \boxed{\frac{1}{t(t^n+1)} = \frac{-t^{n-1}}{t^n+1} + \frac{1}{t}}$$

2) On utilise l'écriture $f_n(t) = \frac{-t^{n-1}}{t^n+1} + \frac{1}{t}$ pour calculer l'intégrale :

$$\begin{aligned} \int_1^2 f_n(t) dt &= \int_1^2 \left(\frac{-t^{n-1}}{t^n+1} + \frac{1}{t} \right) dt = \left[-\frac{1}{n} \ln(t^n+1) + \ln(t) \right]_1^2 = -\frac{1}{n} \ln(2^n+1) + \ln(2) + \frac{1}{n} \ln(1^n+1) + \ln(1) \\ &= \frac{1}{n} \ln(1^n+1) - \frac{1}{n} \ln(2^n+1) + \ln(2) = \ln \left[\left(\frac{2}{2^n+1} \right)^{\frac{1}{n}} \right] + \ln \left((2^n)^{\frac{1}{n}} \right) = \ln \left(\sqrt[n]{\frac{2^{n+1}}{2^n+1}} \right) \end{aligned}$$

3) On pose $u(t) = \ln t \Rightarrow u'(t) = \frac{1}{t}$ et $v'(t) = \frac{t^{n-1}}{(t^n+1)^2} = \frac{1}{n} \frac{w'(t)}{w^2(t)}$ où $w(t) = t^n+1$, donc

$$v(t) = -\frac{1}{nw(t)} = -\frac{1}{n(t^n+1)}, \text{ et ainsi : } \int_1^2 \frac{t^{n-1} \ln t}{(t^n+1)^2} dt = \int_1^2 u(t) v'(t) dt = [u(t)v(t)]_1^2 - \int_1^2 u'(t)v(t) dt$$

$$= \left[-\frac{\ln t}{n(t^n + 1)} \right]_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{t} \times \left(-\frac{1}{n(t^n + 1)} \right) dt = -\frac{\ln 2}{n(2^n + 1)} + \frac{1}{n} \int_1^2 \frac{1}{t(t^n + 1)} dt = -\frac{\ln 2}{n(2^n + 1)} + \frac{1}{n} \ln \left(\sqrt[n]{\frac{2^{n+1}}{2^n + 1}} \right)$$

Exercice n°27

1) Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\ln(u_{n+1}) = 1 + \ln(u_n) = \ln(e) + \ln(u_n) = \ln(eu_n)$, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = eu_n. \text{ La suite } (u_n) \text{ est donc une suite géométrique de raison } e \text{ et de premier terme } u_0 = 2$$

2) Puisque la raison de cette suite est $e > 1$ et que $u_0 > 0$, on en déduit que la suite (u_n) est strictement croissante et que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$$

3) Puisque la suite (u_n) est une suite géométrique de raison e et de premier terme $u_0 = 2$, la somme $\sum_{k=0}^n u_k$ vaut donc

$$\underbrace{u_0}_{\text{premier terme}} \times \frac{1 - \overbrace{e}^{\text{nombre de termes } n+1}}{1 - \underbrace{e}_{\text{raison}}} = 2 \times \frac{1 - e^{n+1}}{1 - e} = \frac{2 - 2e^{n+1}}{1 - e}$$

4) Puisque la suite (u_n) est une suite géométrique de raison e et de premier terme $u_0 = 2$, on établit que pour tout

$n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 \times e^n = 2e^n$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\ln(u_n) = \ln(2e^n) = \ln 2 + \ln(e^n) = \ln 2 + n \ln(e) = \ln 2 + n$.

$$\text{La somme } \sum_{k=1}^n \ln(u_k) \text{ vaut donc : } \sum_{k=1}^n \ln(u_k) = \sum_{k=1}^n (\ln 2 + k) = \sum_{k=1}^n \ln 2 + \sum_{k=1}^n k = n \ln 2 + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1) + 2n \ln 2}{2}$$

En utilisant les propriétés de la fonction logarithme népérien,

$$\text{puisque } \ln(u_1 \times u_2 \times \dots \times u_n) = \sum_{k=1}^n \ln(u_k) = \frac{n(n+1) + 2n \ln 2}{2} \text{ on déduit que } u_1 \times u_2 \times \dots \times u_n = e^{\frac{n(n+1) + 2n \ln 2}{2}}$$

Exercice n°27

1) f est quotient de deux fonctions dérivables sur $x \in \mathbb{R}^{+*}$, dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^{+*}$, donc pour

$$\text{tout } x \in \mathbb{R}^{+*}, f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \text{ avec } u(x) = \ln x \Rightarrow u'(x) = \frac{1}{x} \text{ et } v(x) = x \Rightarrow v'(x) = 1,$$

$$\text{donc } f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2} = \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln(x) \times 1}{x^2} = \frac{1 - \ln(x)}{x^2}$$

2) Pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$, $x^2 > 0$, donc $f'(x)$ aura le même signe que $1 - \ln(x)$.

Ainsi $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - \ln(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(x) = 1 \Leftrightarrow x = e$, et $f'(x) > 0 \Leftrightarrow 1 - \ln(x) > 0 \Leftrightarrow \ln(x) < 1 \Leftrightarrow x < e$. On peut

ainsi conclure que f est strictement croissante sur $]0; e]$, et strictement décroissante sur $[e; +\infty[$

3) Une équation de la tangente à Cf au point d'abscisse 1 est donnée par $y = f'(1)(x-1) + f(1)$, c'est-à-dire

$$y = 1(x-1) + 0, \text{ c'est-à-dire } y = x - 1$$

4) En remarquant que l'écriture de f est $f(x) = \frac{1}{x} \times \ln(x)$, donc de la forme $f(x) = u'(x) \times u(x)$ avec

$$u(x) = \ln(x), \text{ on en déduit qu'une primitive de } f \text{ sur } \mathbb{R}^{+*} \text{ est } F(x) = \frac{1}{2} [u(x)]^2 = \frac{1}{2} (\ln x)^2$$

5) La fonction G est la primitive sur $\mathbb{R}^{+*}$, de la fonction f , qui s'annule en 1. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$, $G'(x) = f(x)$.

Etudions le signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}^{+*}$, qui est le même que celui de $\ln x$ (car $x \in \mathbb{R}^{+*} \Leftrightarrow x > 0$), donc

$f(x) < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$ et $f(x) > 0 \Leftrightarrow x > 1$. Ainsi $G'(x) < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$ et $G'(x) > 0 \Leftrightarrow x > 1$, donc G est

strictement décroissante sur $]0; 1]$ et strictement croissante sur $[1; +\infty[$.

Exercice n°28

1) Pour tout $x > 0$, $\frac{f(x)}{x} = \frac{x}{2} \left(\ln x - \frac{3}{2} \right) = \frac{1}{2} x \ln x - \frac{3x}{4}$. Or $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0$ (limite connue dite « de croissance comparée »), et

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{4} = 0$. Par somme, on en conclut que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0$. Puisque $f(0) = 0$, on peut donc réécrire le résultat précédent sous la

forme $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$, ce qui démontre que f est dérivable en 0 et que $f'(0) = 0$

2) Pour tout $x > 0$, $f'(x) = x \left(\ln x - \frac{3}{2} \right) + \frac{x^2}{2} \left(\frac{1}{x} \right) = x \ln x - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}x = x \ln x - x = x(\ln x - 1)$. Puisque $x > 0$, $f'(x)$ est du signe de $\ln x - 1$. Ainsi $f'(x) > 0 \Leftrightarrow \ln x - 1 > 0 \Leftrightarrow \ln x > 1 \Leftrightarrow x > e$

f est donc strictement décroissante sur $]0; e[$ et strictement croissante sur $[e; +\infty[$.

De plus, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x - \frac{3}{2} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{2} = +\infty$, donc par produit $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

3) On calcule $f(e) = \frac{e^2}{2} \left(\ln(e) - \frac{3}{2} \right) = \frac{e^2}{2} \left(1 - \frac{3}{2} \right) = -\frac{e^2}{4} < 0$. Sur l'intervalle $[e; +\infty[$ f est continue et strictement croissante. De

plus $f(e) < 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. Puisque $0 \in [f(e); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)]$, le **théorème des valeurs intermédiaires** nous permet d'affirmer l'existence et l'unicité de la solution de l'équation $f(x) = 0$, sur $[e; +\infty[$

4) L'équation de T est $y = f'(1)(x-1) + f(1)$. D'après les calculs des questions précédentes, $f'(1) = 1 \times (\ln(1) - 1) = -1$ et

$f(1) = \frac{1^2}{2} \left(\ln(1) - \frac{3}{2} \right) = -\frac{3}{4}$. L'équation de T est donc $y = -(x-1) - \frac{3}{4}$, c'est-à-dire $y = -x + \frac{1}{4}$

5) Courbe représentative

6) a) Pour calculer $I(\lambda) = \int_{\lambda}^e f(x) dx = \int_{\lambda}^e \frac{x^2}{2} \left(\ln x - \frac{3}{2} \right) dx$, on doit

effectuer une **intégration par parties**

On pose $u(x) = \ln x - \frac{3}{2} \Rightarrow u'(x) = \frac{1}{x}$ et $v'(x) = \frac{x^2}{2} \Rightarrow v(x) = \frac{x^3}{6}$,

fonctions toutes deux continûment dérivables sur tout intervalle de la forme $]\lambda; e]$ (avec $\lambda > 0$). Le calcul devient alors :

$$I(\lambda) = \int_{\lambda}^e f(x) dx = \int_{\lambda}^e \frac{x^2}{2} \left(\ln x - \frac{3}{2} \right) dx$$

$$\int_{\lambda}^e v'(x) u(x) dx = [u(x) v(x)]_{\lambda}^e - \int_{\lambda}^e u'(x) v(x) dx$$

$$\left[\frac{x^3}{6} \left(\ln x - \frac{3}{2} \right) \right]_{\lambda}^e - \int_{\lambda}^e \frac{x^3}{6} \times \frac{1}{x} dx = \frac{e^3}{6} \left(\ln e - \frac{3}{2} \right) - \frac{\lambda^3}{6} \left(\ln \lambda - \frac{3}{2} \right) - \int_{\lambda}^e \frac{x^2}{6} dx = -\frac{e^3}{12} - \frac{\lambda^3}{6} \ln \lambda + \frac{\lambda^3}{4} - \left[\frac{x^3}{18} \right]_{\lambda}^e$$

$$-\frac{e^3}{12} - \frac{\lambda^3}{6} \ln \lambda + \frac{\lambda^3}{4} - \frac{e^3}{18} + \frac{\lambda^3}{18} = -\frac{5e^3}{36} + \frac{11\lambda^3}{36} - \frac{\lambda^3}{6} \ln \lambda$$

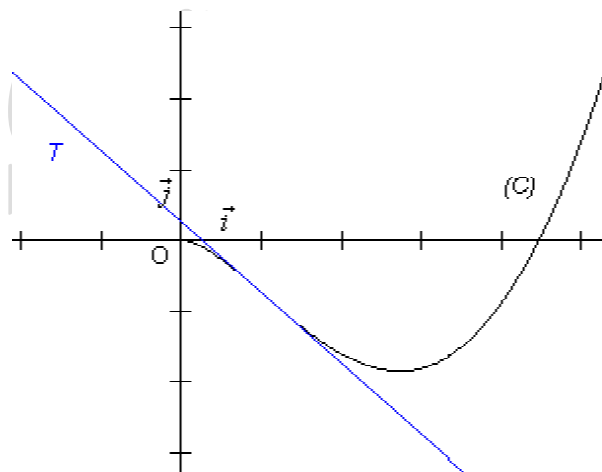
b) Puisque $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \lambda \ln \lambda = 0$ et $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{11}{36} \lambda^3 = 0$, on en déduit, par somme, que $\lim_{\lambda \rightarrow 0} I(\lambda) = -\frac{5e^3}{36}$

c) Puisque pour tout $x \in]0; e]$, $f(x) < 0$, l'intégrale $I(\lambda) = \int_{\lambda}^e f(x) dx$ représente, en unité d'aires, l'opposé de l'aire du plan

délimitée par la courbe (C), l'axe des abscisses, et les droites d'équations respectives $x = \lambda$ et $x = e$.

Si on fait tendre λ vers 0, on peut donc affirmer que l'aire du plan délimitée par la courbe (C), l'axe des abscisses, et les

droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = e$ vaut $\frac{5e^3}{36}$.



Exercice n°29

1) f est définie pour toutes les valeurs de x telles que $|x| > 0$, c'est-à-dire $D =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$. L'ensemble de définition de f étant symétrique par rapport à zéro, pour tout $x \in D$, $-x \in D$ et $f(-x) = -x \ln(|-x|) = -x \ln(|x|) = -f(x)$ donc f est impaire.

Puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} |x| = +\infty$, et puisque $\lim_{u \rightarrow +\infty} \ln(u) = +\infty$, alors en posant $u = |x|$, on obtient $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(|x|) = +\infty$, puis par produit $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln(|x|) = +\infty$, c'est-à-dire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. De la même manière, puisque $\lim_{x \rightarrow -\infty} |x| = +\infty$, on obtient $\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(|x|) = +\infty$, donc par produit $\lim_{x \rightarrow -\infty} x \ln(|x|) = -\infty$, c'est-à-dire $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

Enfin, $\lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0^+$, et puisque $\lim_{u \rightarrow 0, u > 0} \ln(u) = -\infty$, on en déduit, en posant $u = |x|$, que $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(|x|) = -\infty$. Puisque $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$,

on obtient alors une forme indéterminée « $0 \times -\infty$ ». Pour la résorber, deux solutions s'offrent à nous :

- ou on applique la règle de croissance comparée : $\lim_{x \rightarrow 0, x > 0} x \ln(|x|) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0, x < 0} x \ln(|x|) = 0$ car toute fonction polynômiale

« l'emporte » sur la fonction logarithme népérien

- ou on distingue deux cas (ce que nous aurons à faire tôt ou tard !):

Si $x > 0$, $|x| = x$ donc $f(x) = x \ln(x)$ et alors $\lim_{x \rightarrow 0, x > 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0, x > 0} x \ln(x) = 0$ (limite bien connue, elle aussi de « croissance comparée »)

Si $x < 0$, $|x| = -x$ donc $f(x) = x \ln(-x) = -(-x) \ln(-x)$. En posant $u = -x$, on se retrouve à examiner la limite $\lim_{u \rightarrow 0, u > 0} -u \ln(u)$ qui est identique à la précédente. Ainsi $\lim_{x \rightarrow 0, x < 0} -(-x) \ln(-x) = 0$ c'est-à-dire $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$.

Sur $]-\infty; 0[$ et $]0; +\infty[$, f est dérivable en tant que composée et produit de fonctions qui le sont.

Pour tout $x \in]-\infty; 0[$, puisque $f(x) = x \ln(-x)$, on en déduit, par applications successives des formules de dérivation

$(u \times v)' = u' \times v + u \times v'$ et $(\ln(u))' = \frac{u'}{u}$, que $f'(x) = 1 \times \ln(-x) + x \times \frac{-1}{-x} = \ln(-x) + 1$

Pour tout $x \in]0; +\infty[$, puisque $f(x) = x \ln(x)$, on en déduit que $f'(x) = 1 \times \ln(x) + x \times \frac{1}{x} = \ln(x) + 1$

2) Puisque pour tout $x \in]0; +\infty[$, $f'(x) = \ln(x) + 1$, on résout : $f'(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \ln(\lambda) = -1 \Leftrightarrow \lambda = e^{-1} = \frac{1}{e}$

Puisque $2,5 \leq e \leq 3$, $\frac{1}{3} \leq \frac{1}{e} \leq \frac{1}{2,5}$. Comme $\frac{1}{3} \geq 0,3$ et $\frac{1}{2,5} = 0,4$, on trouve l'encadrement annoncé.

3) Pour tout $x \in]0; +\infty[$, $f'(x) > 0 \Leftrightarrow \ln(x) > -1 \Leftrightarrow x > \lambda$. Ainsi, la fonction f est strictement décroissante sur $]0; \lambda[$ et strictement croissante sur $]\lambda; +\infty[$, d'où le tableau de variations (avec $f(\lambda) = \lambda \ln(\lambda) = \frac{1}{e} \ln\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e} \times (-1) = -\frac{1}{e}$)

x	0	λ	$+\infty$
$f'(x)$		-	+
$f(x)$	0	$-\frac{1}{e}$	$+\infty$

4) On effectue une intégration par parties sur l'intervalle $[1; x]$, avec $x > 1$: $G(x) = \int_1^x g(t) dt = \int_1^x 1 \times \ln(t) dt$

En notant $u(t) = \ln(t) \Rightarrow u'(t) = \frac{1}{t}$ et $v'(t) = 1 \Rightarrow v(t) = t$, fonctions toutes les deux continûment dérivables sur $[1; x]$, on

obtient $G(x) = [u(t)v(t)]_1^x - \int_1^x u'(t)v(t) dt = [t \ln t]_1^x - \int_1^x \frac{1}{t} \times t dt = x \ln x - 1 \times \ln(1) - [t]_1^x = x \ln x - x + 1$

La fonction G définie sur $[1; +\infty[$ par $G(x) = x \ln x - x + 1$ est donc la primitive de la fonction g définie par $g(x) = \ln x$, qui s'annule en 1. Mais puisque toutes les primitives de la fonction g sont définies « à une constante près » ; la fonction $x \rightarrow x \ln x - x$ est aussi une primitive de g .

Guesmi.B