

Exercice 1

Un club de randonnée propose à ses adhérents une sortie payante suivant les tarifs indiqués ci-dessous.

Catégorie	A (adultes)	J (jeunes)	E (enfants)
Sortie	20 €	13 €	7 €
Repas	12 €	7 €	4 €

Le club a inscrit 87 participants pour cette sortie dont 58 adultes et 12 enfants.

La moitié des adultes, un quart des enfants et 10 jeunes ont apporté leur propre pique-nique.

On choisit au hasard un participant. On note X la variable aléatoire qui indique le prix payé au club par un participant.

- 1) Faire un arbre d'effectifs suivant la catégorie du participant et suivant qu'il emporte son pique-nique ou non.
- 2) Quelles sont les valeurs possibles prises par X ?
- 3) a) Dresser le tableau de la loi de probabilité de X .
b) Sur quel tarif moyen par adhérent peut compter le club s'il renouvelle un grand nombre de fois ce type de sortie dans les mêmes conditions ?

Exercice 2

- 1) On tire successivement avec remise 8 cartes d'un jeu de 32. Quelle est la probabilité d'obtenir exactement 5 rois ?
- 2) Un QCM comprend 10 questions auxquelles on répond « Vrai » ou « Faux ». Un élève répond au hasard à toutes les questions. A-t-il autant de chances de répondre exactement à 3 questions que de répondre exactement à 7 ?
- 3) On lance 8 fois un dé parfait.
Quelle est la probabilité d'obtenir au moins trois fois un nombre pair ?

Exercice 3

Le personnel d'un hôpital est réparti en trois catégories : M (médecins), S (soignants non médecins) et AT (personnel administratif ou technique).

- 12% sont des médecins et 71% des soignants.
- 67% des médecins sont des hommes et 92% des soignants sont des femmes.

On interroge au hasard un membre du personnel

- 1) Écrire les probabilités correspondantes aux données puis construire un arbre pondéré.
- 2) Quelle est la probabilité que la personne interrogée soit une femme soignante ? une femme médecin ?
- 3) On sait que 80% du personnel est féminin.
 - Calculer la probabilité que la personne interrogée soit une femme AT.
 - En déduire la probabilité que la personne interrogée soit une femme sachant que cette personne interrogée est AT.

Exercice 4

Une fabrique artisanale de jouets en bois vérifie la qualité de sa production avant sa commercialisation. Chaque jouet produit par l'entreprise est soumis à deux contrôles : d'une part l'aspect du jouet est examiné afin de vérifier qu'il ne présente pas de défaut de finition, d'autre part sa solidité est testée.

Il s'avère, à la suite d'un grand nombre de vérifications, que :

- 92% des jouets sont sans défaut de finition ;
- parmi les jouets qui sont sans défaut de finition, 95% réussissent le test de solidité ;
- 2% des jouets ne satisfont à aucun des deux contrôles.

On prend au hasard un jouet parmi les jouets produits. On note :

- F l'événement : « le jouet est sans défaut de finition »
- S l'événement : « le jouet réussit le test de solidité »

1) Construction d'un arbre pondéré associé à cette situation

a) En utilisant l'énoncé, préciser : $P(F)$; $P_F(S)$ et $P(\overline{F} \cap \overline{S})$.

b) Démontrer que $P_{\overline{F}}(\overline{S}) = \frac{1}{4}$.

c) Construire l'arbre pondéré correspondant à cette situation.

2) Calcul de probabilités

a) Démontrer que $P(S) = 0,934$.

b) Un jouet a réussi le test de solidité. Calculer la probabilité qu'il soit sans défaut de finition. (On donnera le résultat arrondi au millième.)

3) Étude d'une variable aléatoire B

Les jouets ayant satisfait aux deux contrôles rapportent un bénéfice de 10 €, ceux qui n'ont pas satisfait au test de solidité sont remis au rebut (donc ne rapporte aucun euro), les autres jouets rapportent un bénéfice de 5€.

On désigne par B la variable aléatoire qui associe à chaque jouet le bénéfice rapporté.

a) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire B.

b) Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire B.

4) Étude d'une nouvelle variable aléatoire.

On prélève au hasard dans la production de l'entreprise un lot de 10 jouets.

On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de jouets de ce lot subissant avec succès le test de solidité. On suppose que la quantité fabriquée est suffisamment importante pour que la constitution de ce lot puisse être assimilée à un tirage avec remise.

Calculer la probabilité qu'au moins 8 jouets de ce lot subissent avec succès le test de solidité.

Exercice 5

Deux ateliers A et B fabriquent des puces électroniques. Pour une commande de 2 000 pièces, A en a produit 60% et B en a produit 40%. L'atelier A produit 4% de puces défectueuses et B en produit 3%. On prend une puce au hasard dans la commande. On appelle A l'événement « la puce provient de l'atelier A », B l'événement « elle provient de l'atelier B » et D l'événement « elle est défectueuse ».

1) Compléter le tableau suivant qui décrit la composition de la commande :

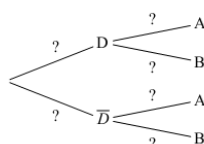
	nombre de puces défectueuses	nombre de puces non défectueuses	total
nombre de puces produit par A			
nombre de puces produit par B			
total			

2) Calculer les probabilités suivantes :

a) $p(D)$, $p(A \cap D)$ et $p_D(A)$

b) $p(\overline{D})$, $p(\overline{D} \cap B)$ et $p_{\overline{D}}(B)$

c) Remplir l'arbre suivant :



Pondichéry avril 2013

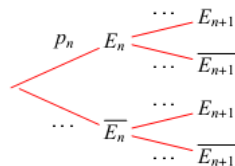
Dans une entreprise, on s'intéresse à la probabilité qu'un salarié soit absent durant une période d'épidémie de grippe.

- Un salarié malade est absent
- La première semaine de travail, le salarié n'est pas malade.
- Si la semaine n le salarié n'est pas malade, il tombe malade la semaine $n + 1$ avec une probabilité égale à 0,04.
- Si la semaine n le salarié est malade, il reste malade la semaine $n + 1$ avec une probabilité égale à 0,24.

On désigne, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, par E_n l'événement « le salarié est absent pour cause de maladie la n -ième semaine ». On note p_n la probabilité de l'événement E_n .

On a ainsi : $p_1 = 0$ et, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 : $0 \leq p_n < 1$.

- 1) a) Déterminer la valeur de p_3 à l'aide d'un arbre de probabilité.
- b) Sachant que le salarié a été absent pour cause de maladie la troisième semaine, déterminer la probabilité qu'il ait été aussi absent pour cause de maladie la deuxième semaine.
- 2) a) Recopier sur la copie et compléter l'arbre de probabilité donné ci-dessous



- b) Montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, $p_{n+1} = 0,2p_n + 0,04$.
- c) Montrer que la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 par $u_n = p_n - 0,05$ est une suite géométrique dont on donnera le premier terme et la raison q .
En déduire l'expression de u_n puis de p_n en fonction de n et r .
- d) En déduire la limite de la suite (p_n) .
- e) On admet dans cette question que la suite (p_n) est croissante. On considère l'algorithme ci-contre :
À quoi correspond l'affichage final J ?
Pourquoi est-on sûr que cet algorithme s'arrête ?
On pose $K = 3$, déterminer J .

Variables : K et J entiers naturels P réel Entrées et initialisation $0 \rightarrow P$ $1 \rightarrow J$ Saisir K Traitement tant que $P < 0,05 - 10^{-K}$ faire $0,2P + 0,04 \rightarrow P$ $J + 1 \rightarrow J$ fin Sorties : Afficher J
--

- 3) Cette entreprise emploie 220 salariés. On admet que la probabilité pour qu'un salarié soit malade une semaine donnée durant cette période d'épidémie est égale à $p = 0,05$. On suppose que l'état de santé d'un salarié ne dépend pas de l'état de santé de ses collègues. On désigne par X la variable aléatoire qui donne le nombre de salariés malades une semaine donnée.
 - a) Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.
 - b) Calculer l'espérance mathématique $E(X)$ et l'écart type $\sigma(X)$.

Antilles-Guyane septembre 2011**Les parties A et B sont indépendantes**

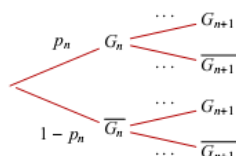
Un site internet propose des jeux en ligne.

Partie A :

Pour un premier jeu :

- si l'internaute gagne une partie, la probabilité qu'il gagne la partie suivante est de $\frac{2}{5}$.
 - si l'internaute perd une partie, la probabilité qu'il perde la partie suivante est de $\frac{4}{5}$.
- Pour tout entier naturel non nul n , on désigne par G_n l'événement « l'internaute gagne la n -ième partie » et on note p_n la probabilité de l'événement G_n .
L'internaute gagne toujours la première partie et donc $p_1 = 1$.

1) Recopier et compléter l'arbre pondéré suivant :



- 2) Montrer que, pour tout n entier naturel non nul, $p_{n+1} = \frac{1}{5}p_n + \frac{1}{5}$.
- 3) Pour tout n entier naturel non nul, on pose $u_n = p_n - \frac{1}{4}$.
- Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{5}$ et de premier terme u_1 à préciser.
 - Montrer que, pour tout n entier naturel non nul, $p_n = \frac{3}{4} \times \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} + \frac{1}{4}$.
 - Déterminer la limite de p_n .

Partie B :

Dans un second jeu, le joueur doit effectuer 10 parties.

On suppose que toutes les parties sont indépendantes.

La probabilité de gagner chaque partie est égale à $\frac{1}{4}$.

Soit X la variable aléatoire égale au nombre de parties gagnées par le joueur.

- Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X ? Justifier.
 - Quelle est la probabilité que le joueur gagne au moins une partie? Le résultat sera arrondi à 10^{-2} près.
 - Déterminer l'espérance de X .
- Le joueur doit payer 30 € pour jouer les 10 parties. Chaque partie gagnée lui rapporte 8 €.
 - Expliquer pourquoi ce jeu est désavantageux pour le joueur.
 - Calculer la probabilité pour un joueur de réaliser un bénéfice supérieur à 40 €? Le résultat sera arrondi à 10^{-5} près.

Exercice 8

On dispose de deux urnes :

- une urne U_1 dans laquelle se trouvent trois boules blanches et deux boules noires.
- une urne U_2 dans laquelle se trouvent deux boules blanches et trois boules noires.

Une épreuve consiste à tirer simultanément et au hasard deux boules de chaque urne : on obtient ainsi quatre boules, les tirages dans chaque urne étant équiprobables.

1°) Montrer que la probabilité de l'événement E : « parmi les quatre boules tirées, il y a exactement deux boules blanches » est égale à 0,46.

2°) On note X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe le nombre de boules blanches obtenues.

- a) Déterminer la loi de probabilité de X .
- b) Le joueur doit verser 2,50 € avant d'effectuer le tirage ; il reçoit à l'issue du tirage 1 € par boule blanche obtenue. Le jeu est-il équitable ?

3°) Calculer la probabilité d'avoir tiré une et une seule boule blanche de l'urne U_1 sachant qu'on a tiré exactement deux boules blanches.

4°) On ne considère que l'urne U_1 , de laquelle on tire toujours au hasard et simultanément deux boules.

On nomme succès le tirage de deux boules blanches.

On renouvelle dix fois la même épreuve (en remettant chaque fois les boules tirées dans l'urne). Déterminer la probabilité d'avoir au moins deux succès sur les dix tirages.

Exercice 9

Une urne contient des jetons blancs et noirs tous indiscernables au toucher.

Une partie consiste à prélever au hasard successivement et avec remise deux jetons de cette urne.

On établit la règle de jeu suivante :

- un joueur perd 9 euros si les deux jetons tirés sont de couleur blanche ;
- un joueur perd 1 euro si les deux jetons tirés sont de couleur noire ;
- un joueur gagne 5 euros si les deux jetons tirés sont de couleurs différentes.

1. On considère que l'urne contient 2 jetons noirs et 3 jetons blancs.

- a. Modéliser la situation à l'aide d'un arbre pondéré.
- b. Calculer la probabilité de perdre 9 € sur une partie.

2. On considère maintenant que l'urne contient 3 jetons blancs et au moins deux jetons noirs mais on ne connaît pas le nombre exact de jetons noirs. On appellera N le nombre de jetons noirs.

- a. Soit X la variable aléatoire donnant le gain du jeu pour une partie.
Déterminer la loi de probabilité de cette variable aléatoire.
- b. Résoudre l'inéquation pour x réel :

$$-x^2 + 30x - 81 > 0$$

- c. En utilisant le résultat de la question précédente, déterminer le nombre de jetons noirs que l'urne doit contenir afin que ce jeu soit favorable au joueur.
- d. Combien de jetons noirs le joueur doit-il demander afin d'obtenir un gain moyen maximal ?

3. On observe 10 joueurs qui tentent leur chance en effectuant une partie de ce jeu, indépendamment les uns des autres. On suppose que 7 jetons noirs ont été placés dans l'urne (avec 3 jetons blancs).

Quelle est la probabilité d'avoir au moins 1 joueur gagnant 5 euros ?