

Exercices sur les suites

Exercice 1

Soit la suite $u_n = (2n+1)^2 - (2n+3)^2$ pour tout n entier

1. Démontrer que (u_n) est arithmétique
2. Donner u_0 et sa raison r
3. Calculer la somme des 7 premiers termes

Exercice 2

Soit la suite $V_n = \frac{3 \times 5^{n+2}}{3^n}$ pour tout n entier

1. Démontrer que (V_n) est géométrique
2. Donner v_0 et la raison q
3. Exprimer v_n en fonction de n
4. Calculer la somme des 6 premiers termes (à 10^{-3})
5. Donner les variations de (V_n)

Exercice 3

Calculer (en expliquant)

$$P = 1 - 2 + 4 - \dots - 2048$$

$$Q = 0,3 + 0,3^2 + 0,3^3 + \dots + 0,3^{10}$$

Exercice 4

Soit la suite (u_n) définie pour tout n entier par $u_0 = 8$ et $u_{n+1} = 2u_n - 3$ et la suite (v_n) définie par $v_n = u_n - 3$

1. Calculer v_0, v_1, v_2
2. Démontrer que (v_n) est une suite géométrique
3. Déterminer l'expression de v_n en fonction de n
4. En déduire que $v_n = 5 \times 2^n + 3$
5. Calculer v_{10}

Exercice 5

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \frac{u_n}{2u_n + 1}$

On admet que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq 0$. On définit ainsi la suite (v_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = \frac{1}{u_n}$.

- 1) Montrer que la suite (v_n) est une suite arithmétique, dont on précisera la raison et le premier terme.
- 2) Exprimer v_n en fonction de n .
- 3) En déduire une expression de u_n en fonction de n .
- 4) Montrer que pour tout entier naturel n non nul : $0 < u_n \leq \frac{1}{3}$
- 5) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

Exercice 6

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 3$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \frac{4u_n - 2}{u_n + 1}$.

1. a) Calculer u_0 , u_1 et u_2 .

b) La suite (u_n) est-elle arithmétique, géométrique ?

Soit (v_n) la suite définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $v_n = \frac{u_n - 2}{u_n - 1}$. On admet que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 1$.

2. a) Calculer v_0 , v_1 et v_2 .

b) Quelle est la nature de la suite (v_n) ?

3. Exprimer v_n en fonction de n . En déduire une expression de u_n en fonction de n .

4. Étudier le sens de variation des suites (u_n) et (v_n) .

Exercice 7

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = \frac{1}{4}$ et $u_{n+1} = \frac{2 + 3u_n}{4 + u_n}$.

1) Calculer u_1 , u_2 et u_3 . S'agit-il d'une suite arithmétique ou géométrique ?

2) Montrer que si $u_{n+1} = 1$, alors $u_n = 1$. En déduire que pour tout n , $u_n \neq 1$.

3) Soit (v_n) la suite définie par $v_n = \frac{2 + u_n}{1 - u_n}$. Calculer v_0 , v_1 , v_2 , v_3 . Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique.

4) Exprimer v_n en fonction de n , en déduire une expression de u_n en fonction de n .

5) La suite (u_n) a-t-elle une limite ? Si oui, laquelle ?

Exercice 8

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 6$ et $u_{n+1} = \frac{4u_n - 6}{u_n - 1}$.

1) Calculer u_1 , u_2 et u_3 . S'agit-il d'une suite arithmétique ou géométrique ?

2) Montrer que si $u_{n+1} = 2$, alors $u_n = 2$. En déduire que pour tout n , $u_n \neq 2$.

3) Soit (v_n) la suite définie par $v_n = \frac{u_n - 3}{u_n - 2}$. Calculer v_0 , v_1 , v_2 , v_3 . Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique.

4) Exprimer v_n en fonction de n , en déduire une expression de u_n en fonction de n .

5) La suite (u_n) a-t-elle une limite ? Si oui, laquelle ?

Exercice 9

Une personne loue un local à partir du 1^{er} janvier 2007. Elle a le choix entre deux formules de contrat. Dans les deux cas, le loyer annuel initial (c'est-à-dire le loyer payé en 2007) est 24 000 € et le locataire s'engage à occuper le local pendant neuf années complètes.

1. Contrat 1 : Le loyer annuel augmente de 4% par an.

On note u_0 le loyer payé la première année c'est-à-dire le loyer payé en 2007 et u_n le loyer payé en l'année $(2007 + n)$. Le loyer annuel augmente de 4% par an.

- Calculer u_1 le loyer payé lors de la deuxième année.
- Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n . En déduire la nature de la suite (u_n) et donner ses caractéristiques.
- Donner l'expression de u_n en fonction de n . En déduire u_8 à 10^{-2} près.
- Calculer la somme totale payée à l'issue des neuf années de contrat. Arrondir à 10^{-2} près.
- Déterminer à partir de quelle année le loyer annuel dépassera 36000 euros.

2. Contrat 2 : Le loyer annuel augmente de 1500 € par an.

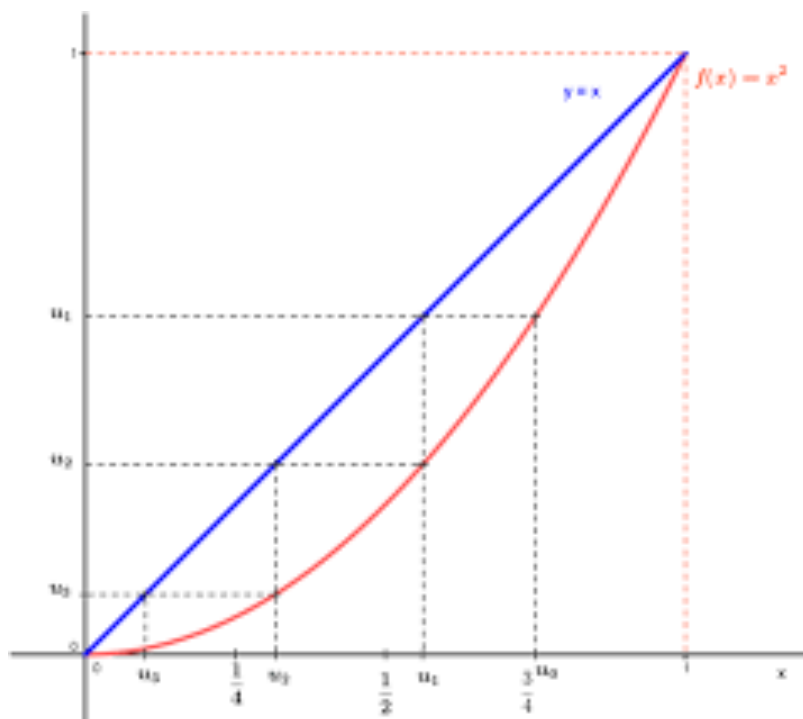
On note v_0 le loyer payé la première année c'est-à-dire le loyer payé en 2007 et v_n le loyer payé en l'année $(2007 + n)$. Le loyer annuel augmente de 1500 € par an.

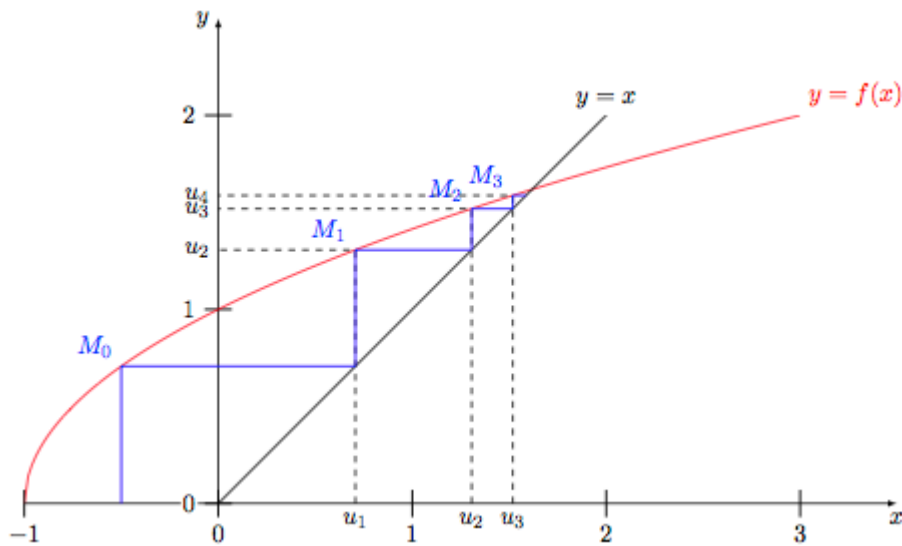
- Calculer v_1 le loyer payé lors de la deuxième année.
- Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n . En déduire la nature de la suite (v_n) et donner ses caractéristiques.
- Donner l'expression de v_n en fonction de n . En déduire v_8 .
- Calculer la somme totale payée à l'issue des neuf années de contrat.
- Déterminer à partir de quelle année le loyer annuel double.

3. Bilan : quel est le contrat le plus intéressant ?

Exercice 10

En vous aidant des figures ci-dessous conjecturez sur les variations et limites des suites u_n





Exercice 11

Exercice 6 : Déterminer les limites des suites suivantes :

- | | | | |
|---|-----------------------------|--|--|
| (1) $u_n = \frac{3}{n^2}$ | (2) $u_n = 5 - \frac{2}{n}$ | (3) $u_n = 5 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$ | (4) $u_n = 1 - \left(\frac{5}{2}\right)^n$ |
| (5) $u_n = 3n^2 + 2n + 5 - \frac{6}{n}$ | (6) $u_n = \frac{1}{n} - 2$ | (7) $u_n = 1 - \frac{2}{\sqrt{n}} + \frac{3}{n^3}$ | (8) $u_n = \frac{2^{-n} - 2}{1 - 0.1^n}$ |

Exercice 7 : Déterminer les limites des suites suivantes :

- | | | |
|---------------------------------|--|--|
| (1) $u_n = \frac{1-2n}{1+n}$ | (2) $u_n = \frac{1-2n^2}{1+n}$ | (3) $u_n = \frac{1-2n}{1+n^3}$ |
| (4) $u_n = \frac{0.1^n}{1-n^2}$ | (5) $u_n = \frac{1+n^2}{1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^2}$ | (6) $u_n = (n+2) \times \frac{3}{n^2}$ |