

Contrôle n°2 de spécialité Mathématiques

Durée : 1h50

La calculatrice est autorisée

Le barème est donné à titre indicatif, il pourra être modifié

Le sujet est composé de quatre exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices.

Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

Sauf mention contraire, TOUTES LES REPONSES doivent être justifiées.

Exercice 1 (4,5 points)

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquez si elles est vraie ou fausse en justifiant soigneusement votre réponse.

Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte.

Les questions 1., 2. et 3. sont indépendantes.

1. Soit $f: x \mapsto \sqrt{2x^2 + 7}$. On admet que f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

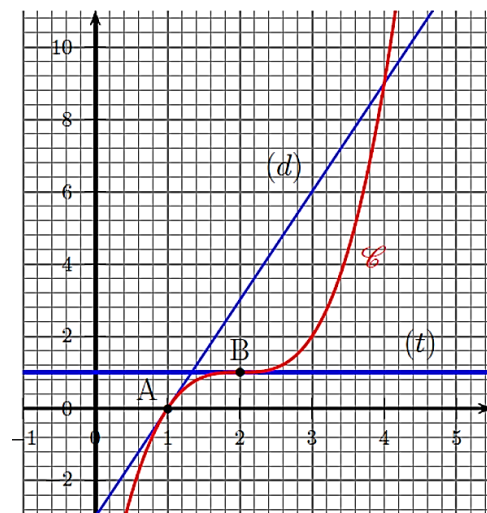
Affirmation 1 : $f'(-1) = -\frac{2}{3}$.

2. On considère le repère ci-contre dans lequel :

- la courbe $\mathcal{C}$ représente une fonction g définie et strictement croissante sur $\mathbb{R}$;
- le point A est le point de la courbe $\mathcal{C}$ d'abscisse 1 et le point B celui d'abscisse 2 ;
- la droite (d) est la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point A ;
- la tangente (t) à la courbe $\mathcal{C}$ au point B est horizontale.

Affirmation 2 : $g'(1) = 1$.

Affirmation 3 : $g''(2) = 0$.

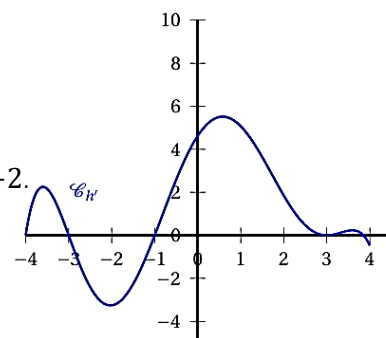


3. Soit h une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[-4; 4]$.

La représentation graphique $\mathcal{C}_h$ de sa fonction dérivée h' est donnée ci-contre.

Affirmation 4 : La fonction h est convexe sur $[-3; -1]$.

Affirmation 5 : La représentation graphique de la fonction h admet un point d'inflexion en -2 .



Exercice 2 (5 points)

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 5xe^{-x}$. On note $\mathcal{C}_f$ sa représentation graphique dans un repère du plan.

1. Etudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

2. On admet que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout réel x , $f''(x) = e^{-x}(-10 + 5x)$.

- Etudier la convexité de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
- En déduire les éventuels points d'inflexion de $\mathcal{C}_f$.

3. Soit T la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 3.

- Justifier que T a pour équation $y = 5(9 - 2x)e^{-3}$.
- Justifier que, pour tout réel $x \in [2; +\infty[$ on a : $e^{-x} \geq \frac{9-2x}{x e^3}$.

Tournez la page s'il vous plaît

Exercice 3 (7 points)

Soit $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère de l'espace. Soient $A(1; 0; 2)$, $B(2; 1; 0)$, $C(-1; 2; 2)$, $D(2; 2; 3)$ et $E(-2; 2; 7)$ cinq points.

1. a. Justifier que les points A , B et C définissent un plan.
b. Les points A , B , C et D sont-ils coplanaires ?
2. a. Vérifier que $\overrightarrow{DE} = -2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.
b. En déduire la position relative de la droite (DE) et du plan (ABC) .
3. Soit d la droite dont une représentation paramétrique est $\begin{cases} x = -1 + 6k \\ y = 2 - 3k \\ z = 6 - 2k \end{cases}$ où $k \in \mathbb{R}$.
a. Justifier que les droites d et (DE) ne sont pas parallèles.
b. Donner une représentation paramétrique de la droite (DE) .
c. Montrer que ces droites sont en fait sécantes et déterminer les coordonnées de leur point d'intersection.
4. Soit d_2 la droite passant par C et parallèle à la droite d .
a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite d_2 .
b. Déterminer les coordonnées du point K de la droite d_2 ayant pour ordonnée 5.

Exercice 4 (3,5 points)

Soit $ABCD$ un tétraèdre.

On note I et K les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[CD]$.

On note G le milieu du segment $[IK]$ et Ω le point défini par $\overrightarrow{\Omega B} = \frac{2}{3}\overrightarrow{KB}$.

1. Montrer que $\overrightarrow{BG} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{4}\overrightarrow{BD} + \frac{1}{4}\overrightarrow{BA}$.
2. L'espace est rapporté au repère $(B; \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BA})$.

On pourra utiliser sans justification les coordonnées des points A , B , C et D .

- a. Déterminer les coordonnées de G dans le repère.
- b. Calculer les coordonnées de Ω .
- c. Justifier qu'une représentation paramétrique de (AG) est :

$$\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 2 - t \\ z = -5 + 3t \end{cases} \quad \text{où } t \in \mathbb{R}$$

Indication : On pourra noter (d) la droite dont une représentation paramétrique est celle donnée ci-dessus puis vérifier que (d) et (AG) sont confondues.

- d. Démontrer que $\Omega \in (AG)$.

