

Bareme

DST sur les Fonctions

Nbr 23

QCM 1 a) Cf admet une asymptote verticale d'eq $x = -5$ et une horizontale d'eq $y = 2$ au moins!

2 c) $f'(x) = -2e^{-2x+1}$

3 b) $g(12) = 0$ et $x \in [2; 8]$ 2m

5x1 4) b) $f'(1)$ et le coefficient directeur de la
tge (AB) = 1,5

5) a)

x	1	2,5
g'	-	+

donc

x	1	2,5
g	↘	↗

Exercice 1:

1) * $Df = \mathbb{R} - \left\{ -\frac{1}{2} \right\}$ 0,5

2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ (conjectures) 0,5

3) $x = -\frac{1}{2}$ equation de l'asymptote verticale (lecture graphique) 1

4) $g(x) = \frac{1}{x+1}$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$ $\lim_{x \rightarrow -1^-} g(x) = -\infty$ } Par composition $\lim_{x \rightarrow -\infty} g \circ f(x) = -\infty$ 1

$\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}^-} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0$

Par composition

$\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}^-} g \circ f = 0$

1,5

Exercice 2 : $g(x) = e^x - xe^x + 1$ sur $[0; +\infty[$

① $g(x) = e^x(1-x) + 1$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} (1-x) = -\infty$
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x) = +\infty$

Par produit
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x(1-x) = -\infty$

Par somme $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$ 0,5

2) $g'(x) = e^x - xe^x - e^x = -xe^x$

$e^x > 0$ sur $[0; +\infty[$

x	0	$+\infty$
$-x$	-	-
e^x	+	+
g'	-	-

$g(0) = e^0 - 0 + 1 = 2$

- 3) a) g est dérivable donc continue sur $[0; +\infty[$
 g est strictement monotone décroissante sur $[0; +\infty[$

$g(0) = 2$
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} g = -\infty$ } $0 \in]-\infty; g(0)]$

d'après le thm de la bijection l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α .

b) g change de signe entre $g(1)$ et $g(2)$ ainsi $\alpha = 1$ $\alpha = 2$

de plus l'encadrement doit être à 10^{-2} donc $\epsilon = 0,01$

c) $1,27 < \alpha < 1,28$ à l'aide de la calculatrice

d) on sait que $g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow e^\alpha - \alpha e^\alpha + 1 = 0$

$\Leftrightarrow e^\alpha(1-\alpha) = -1$

$\Leftrightarrow e^\alpha = \frac{1}{\alpha-1}$

x	0	α	$+\infty$
g	+	0	-

Partie 2 : $A(x) = \frac{4x}{e^x+1}$ sur $[0; +\infty[$

1) $A'(x) = \frac{4(e^x+1) - 4x(e^x)}{(e^x+1)^2} = \frac{4(e^x - xe^x + 1)}{(e^x+1)^2} = \frac{4g(x)}{(e^x+1)^2}$ 1

4) 0
 $(e^x+1)^2 > 0$ sur $[0; +\infty[$ donc A' a le signe de g .

2) Ainsi : 

$A(0) = 0$
 $A(\alpha) = \frac{4\alpha}{e^\alpha+1}$ or $C^* = \frac{1}{\alpha-1}$ d'où $A(\alpha) = \frac{4\alpha}{\frac{1}{\alpha-1}+1}$

$A(\alpha) = 4\alpha \times \frac{\alpha-1}{\alpha} = 4(\alpha-1)$

Partie 3 : $A(OPMQ) = x \times f(x) = \frac{4x}{e^x+1} - A(x)$

- 1) le maximum de A sur $[0; +\infty[$ est atteint pour $x = \alpha$
donc l'aire maximale du rectangle OPMQ est lorsque M a pour abscisse α .

On a alors $A(\alpha) = 4(\alpha-1)$
l'aire maximale est donc de $4(\alpha-1)$.

- 2) le coefficient directeur de T est $f'(\alpha) = m$
le coefficient directeur de (PQ) est $m' = \frac{f(\alpha)}{-\alpha} = \frac{f(\alpha)}{-\alpha}$

On doit donc calculer $f'(\alpha)$ $f'(x) = \frac{-4e^x}{(e^x+1)^2}$
 $m = f'(\alpha) = \frac{-4e^\alpha}{(e^\alpha+1)^2}$

$f'(\alpha) = \frac{-4 \times \frac{1}{\alpha-1}}{(\frac{1}{\alpha-1}+1)^2} = \frac{-4}{\alpha-1} \times \frac{1}{(\frac{\alpha}{\alpha-1})^2} = \frac{-4(\alpha-1)}{\alpha^2}$

De plus $m' = \frac{f(\alpha)}{-\alpha} = \frac{-\frac{1}{\alpha} \times \frac{4}{e^\alpha+1}}{-\alpha} = -\frac{1}{\alpha} \times \frac{4}{\frac{\alpha}{\alpha-1}} = \frac{-4(\alpha-1)}{\alpha^2}$

Les droites T et (PQ) ont $m = m'$
m coefficient directeur, elles sont donc parallèles.

1/10