

# Interrogation sur les fonctions (spé maths)

Deux heures

Calculatrice en mode examen

## QCM (5 points)

Pour chacune des questions posées, une seule des réponses proposées est exacte. Recopier le numéro de chaque question et préciser la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée. Une réponse juste rapporte 1 point, une réponse fautive enlève 0,25 points. L'absence de réponse n'enlève pas de point.

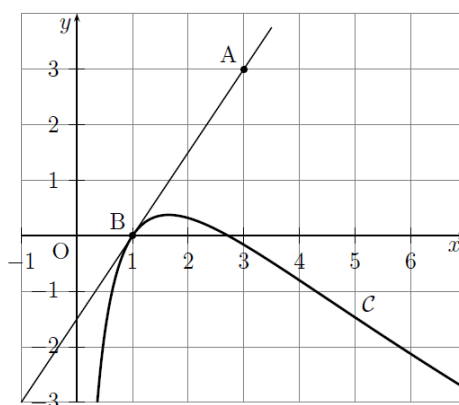
1. On donne le tableau de variation de la fonction  $f$

|         |           |           |      |      |           |     |
|---------|-----------|-----------|------|------|-----------|-----|
| $x$     | $-\infty$ | $-5$      | $-2$ | $0$  | $+\infty$ |     |
| $f'(x)$ | $-$       | $+$       | $0$  | $-$  | $0$       | $+$ |
| $f(x)$  | $2$       | $-\infty$ | $0$  | $-2$ | $+\infty$ |     |

- a) la courbe de  $f$  admet au minimum deux asymptotes  
 b)  $-2$  est le minimum de la fonction sur son ensemble de définition  
 c) la droite d'équation  $y=0$  coupe la courbe de la fonction  $f$  en un seul point
2. La fonction  $f$  est définie et dérivable sur l'ensemble des nombres réels  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = e^{-2x+1}$ . On note  $f'$  sa fonction dérivée. Pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$ ,
- a)  $f'(x) = e^{-2}$                       b)  $f'(x) = e^{-2x+1}$                       c)  $f'(x) = -2e^{-2x+1}$
3. On donne le tableau de variation d'une fonction  $g$  définie et continue sur l'intervalle  $[-5; 12]$  :

| $x$    | $-5$ | $2$  | $8$ | $12$ |
|--------|------|------|-----|------|
| $g(x)$ | $-3$ | $-8$ | $1$ | $0$  |

- a) Pour tout  $x \in [-5; 12]$ ,  $g(x) \geq 0$ .  
 b) L'équation  $g(x) = 0$  admet exactement deux solutions sur l'intervalle  $[-5; 12]$ .  
 c) Pour tout  $x \in [-5; 8]$ ,  $g(x) < 0$ .
4. La courbe  $\mathcal{C}$  donnée ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction  $f$  définie et dérivable sur l'intervalle  $]0; +\infty[$ . La droite  $(AB)$ , tracée sur le graphique, est tangente à la courbe  $\mathcal{C}$  au point  $B$  d'abscisse 1.



On note  $f'$  la fonction dérivée de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $]0 ; +\infty[$ .

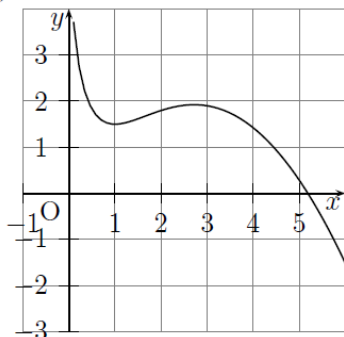
a)  $f'(1) = 0$

b)  $f'(1) = 1,5$

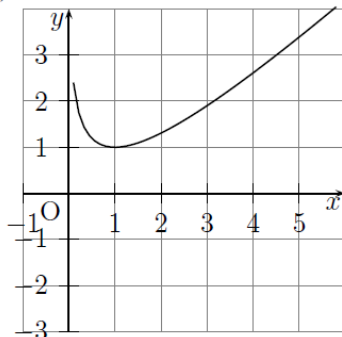
c)  $f'(1) = -\frac{2}{3}$

5. Une seule des trois courbes ci-après est la représentation graphique d'une fonction  $g$  telle que  $g' = f$  (la fonction dérivée de la fonction  $g$  est la fonction  $f$  introduite à la question 4.). Préciser laquelle.

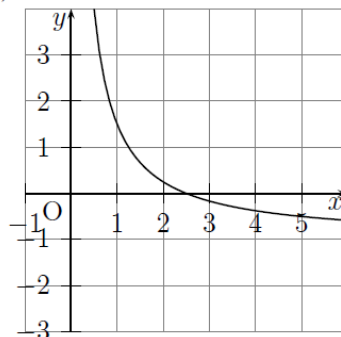
a)



b)

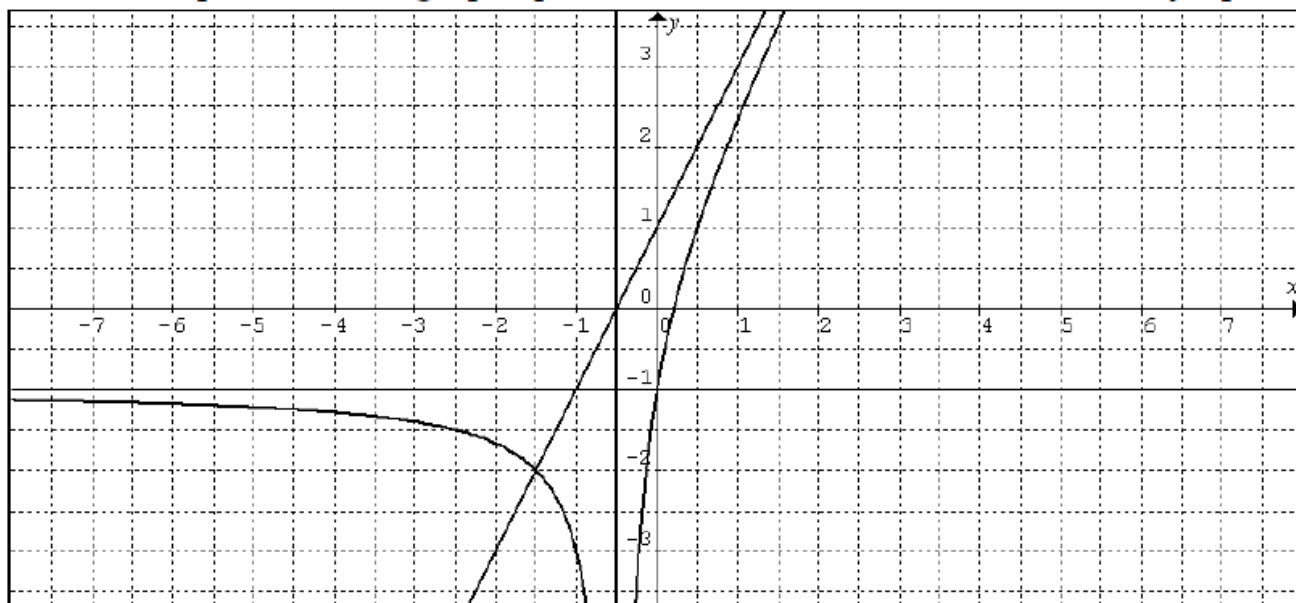


c)



### Exercice 1 (5 points)

On donne la représentation graphique d'une fonction  $f$  et de ses trois asymptotes



1

1. Conjecturer l'ensemble de définition de  $f$
2. Donner les limites de  $f$  en  $-\infty$  et  $+\infty$
3. Donner l'équation de l'asymptote verticale
4. La fonction  $g$  est définie par  $g(x) = \frac{1}{x+1}$ .  
Déterminer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (g \circ f)(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} (g \circ f)(x)$

Tourner la page SVP →

## Exercice 2 (10 points)

**PARTIE 1 :** Soit  $g$  la fonction définie sur  $[0 ; +\infty[$  par  $g(x) = e^x - xe^x + 1$

1. Déterminer la limite de  $g$  en  $+\infty$ .
2. Etudier les variations de la fonction  $g$  puis donner le tableau de variation de  $g$ .
3. a) Démontrer que l'équation  $g(x) = 0$  admet sur  $[0 ; +\infty[$  une unique solution. On la notera  $\alpha$ .  
b) On souhaite déterminer un encadrement de  $\alpha$  par dichotomie. Quelles valeurs  $a, b$  et  $c$  peut-on rentrer dans le programme ci-dessous pour obtenir un encadrement à  $10^{-2}$  ?

Fonction dichotomie( $g, a, b, c$ ) :

Tant que  $b - a > c$

$m \leftarrow \frac{1}{2}(b + a)$

si  $g(m) \times g(a) < 0$  alors :

$b \leftarrow m$

sinon

$a \leftarrow m$

Fin si

Fin du tant que

Retourne le couple  $(a, b)$

- c) A l'aide de la calculatrice, déterminer un encadrement d'amplitude  $10^{-2}$  de  $\alpha$ .
  - d) Démontrer que  $e^\alpha = \frac{1}{\alpha - 1}$ .
4. Déterminer le signe de  $g(x)$  suivant les valeurs de  $x$ .

## **PARTIE 2 :**

Soit  $A$  la fonction définie et dérivable sur  $[0 ; +\infty[$  telle que  $A(x) = \frac{4x}{e^x + 1}$ .

1. Démontrer que pour tout réel  $x$  positif ou nul,  $A'(x)$  a le même signe que  $g(x)$ , où  $g$  est la fonction définie dans la partie 1.
2. En déduire les variations de la fonction  $A$  sur  $[0 ; +\infty[$ .

## **PARTIE 3 :**

On considère la fonction  $f$  définie sur  $[0 ; +\infty[$  par  $f(x) = \frac{4}{e^x + 1}$ .

On note  $(\mathcal{C})$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ .

La figure est donnée ci-dessous.

Pour tout réel  $x$  positif ou nul, on note :

$M$  le point de  $(\mathcal{C})$  de coordonnées  $(x ; f(x))$ ,

$P$  le point de coordonnées  $(x ; 0)$ ,

$Q$  le point de coordonnées  $(0 ; f(x))$ .

1. Démontrer que l'aire du rectangle  $OPMQ$  est maximale lorsque  $M$  a pour abscisse  $\alpha$ .  
On rappelle que le réel  $\alpha$  a été défini dans la partie 1. Exprimer cette aire maximale en fonction de  $\alpha$ .

2. Le point  $M$  a pour abscisse  $\alpha$ .

La tangente (T) en  $M$  à la courbe ( $\mathcal{C}$ ) est-elle parallèle à la droite ( $PQ$ ) ?

