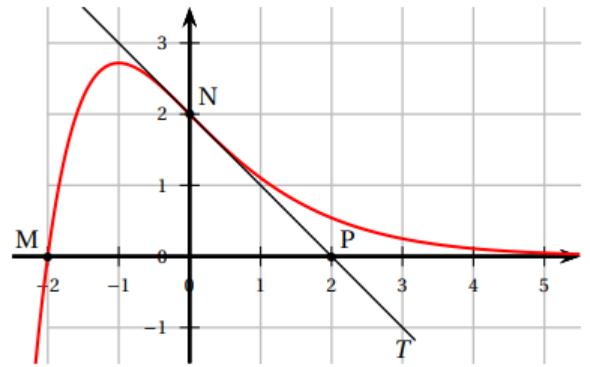


Correction travail de groupe 2 : fonctions et convexité

Soit f une fonction définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. On note f' sa fonction dérivée et f'' sa dérivée seconde. Dans le repère orthonormé ci-dessous ont été représentés :

- la courbe représentative C_f de la fonction f ;
- la tangente T à C_f en son point $N(0; 2)$;
- le point $M(-2; 0)$ appartenant à C_f et $P(2; 0)$ appartenant à la tangente T .



On précise que la fonction f est strictement positive sur l'intervalle $[0; +\infty[$ et qu'elle est strictement croissante sur l'intervalle $] -\infty; -1]$.

Partie A : étude graphique

1. a. On lit $f(0) = 2$.

b. Le nombre dérivé $f'(0)$ est égal au coefficient directeur de la droite (NP) soit à

$$\frac{y_P - y_N}{x_P - x_N} = \frac{0 - 2}{2 - 0} = -1$$

Donc $f'(0) = -1$

2. Résoudre l'équation $f(x) = 0$.

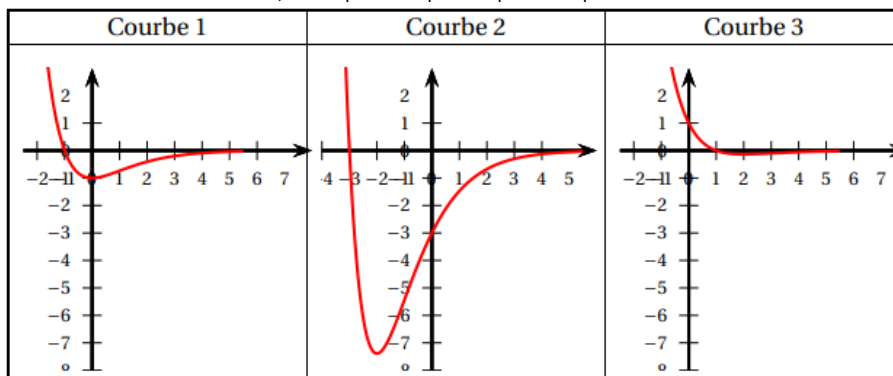
Il s'agit des abscisses des points d'intersection de la courbe C_f et de l'axe des abscisses.

$M(-2; 0)$ est l'unique point d'intersection sur $] -\infty; 0]$ donc -2 est la seule solution de l'équation sur $] -\infty; 0]$. De plus, f est strictement positive sur l'intervalle $[0; +\infty[$ donc l'équation $f(x) = 0$ n'admet aucune solution sur $[0; +\infty[$. On a donc : $S = \{-2\}$.

3. La fonction f est-elle convexe sur $\mathbb{R}$? Justifier.

La tangente T à C_f au point d'abscisse 0 traverse la courbe donc que f change de convexité en 0 et n'est donc pas convexe sur $\mathbb{R}$.

4. Parmi les courbes suivantes, indiquer laquelle peut représenter la dérivée de la fonction f sur $\mathbb{R}$.



f est croissante sur $] -\infty; -1]$ et décroissante sur $[-1; +\infty[$ donc sa dérivée f' est positive sur $] -\infty; -1]$ et négative sur $[-1; +\infty[$. La seule courbe qui convient est la 1.

Partie B : recherche d'une expression algébrique

On admet que la fonction f est de la forme : $f(x) = (ax + b)e^{\lambda x}$

où a, b et λ sont des constantes réelles.

Pour répondre aux questions suivantes, on utilisera les résultats de la partie A.

1. Justifier que $b = 2$.

On sait que $f(0) = 2$

$$\text{Or } f(0) = 2 \Leftrightarrow (a \times 0 + b)e^{\lambda \times 0} = 2 \Leftrightarrow b = 2$$

Donc pour tout réel x , $f(x) = (ax + 2)e^{\lambda x}$

2. Justifier que $-2a + b = 0$ puis en déduire la valeur de a .

On sait aussi que $f(-2) = 0$ donc $(-2a + b)e^{-2\lambda} = 0 \Leftrightarrow -2a + b = 0$ car $e^{-2\lambda} > 0$

Or $b = 2$ d'après la question précédente donc $-2a + 2 = 0 \Leftrightarrow a = 1$

Ainsi pour tout réel x , $f(x) = (x + 2)e^{\lambda x}$

3. Déterminer une expression algébrique de f . Justifier.

$f = u \times e^v$ où $u: x \mapsto x + 2$ et $v: x \mapsto \lambda x$.

u et v sont affines donc dérivables sur $\mathbb{R}$. Donc e^v est dérivable sur $\mathbb{R}$ et donc f aussi, comme produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et : $f' = u' \times e^v + (e^v)' \times u = u' \times e^v + v' e^v \times u = e^v(u' + uv')$

Pour tout réel x on a donc : $f'(x) = e^{\lambda x}(1 + \lambda(x + 2)) = e^{\lambda x}(\lambda x + 2\lambda + 1)$

Or $f'(0) = -1$. Donc $e^0(2\lambda + 1) = -1 \Leftrightarrow 2\lambda = -1 - 1 \Leftrightarrow \lambda = -1$

Donc pour tout réel x , $f(x) = (x + 2)e^{-x}$

Partie C : étude algébrique

On admet que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x + 2)e^{-x}$.

1. Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.

D'après la question 3 de la partie B, on sait que pour tout réel x :

$$f'(x) = e^{-x}(-x - 2 + 1) = e^{-x}(-x - 1)$$

Or pour tout réel x , $e^{-x} > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $-x - 1$

Ainsi sur $] -\infty; -1]$ f est croissante car $f'(x) \geq 0$ et sur $[-1; +\infty[$, f est décroissante car $f'(x) \leq 0$.

2. a. Etudier la convexité de f

f' est elle-même dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit d'une fonction affine et de la composée de la fonction exponentielle avec une fonction affine toutes deux dérivables sur $\mathbb{R}$

Pour tout réel x , $f'(x) = -e^{(-x)} \times (-x - 1) + (-1) \times e^{-x} = e^{-x}(x + 1 - 1) = xe^{-x}$

$e^{-x} > 0$ sur $\mathbb{R}$ donc $f''(x)$ est du signe de x

Donc f est convexe sur $[0; +\infty[$ car $f''(x) \geq 0$ et f est concave sur $] -\infty; 0]$ car $f''(x) \leq 0$.

b. Préciser les coordonnées des éventuels points d'inflexion de la courbe C_f .

$f''(x)$ s'annule en changeant de signe au point d'abscisse 0 donc le point de coordonnées $(0; f(0))$ est le seul point d'inflexion de la courbe C_f . Il s'agit du point $N(0; 2)$.

3. Déterminer l'équation de la tangente à C_f au point d'abscisse 0.

$$T_1 \text{ a pour équation } y = f'(1)(x - 1) + f(1) = -\frac{2}{e}x + \frac{2}{e} + \frac{3}{e} = -\frac{2}{e}x + \frac{5}{e}$$

4. Démontrer que pour tout réel $x \geq 0$, $e^{-x} \geq \frac{2x+2}{e(x+2)}$.

f est convexe sur $[0; +\infty[$ donc C_f se situe au-dessus de ses tangentes sur cet intervalle.

Or $1 \in [0; +\infty[$ donc C_f se situe au-dessus de sa tangente T_1 au point d'abscisse 1 donc, pour tout réel $x \in [0; +\infty[$:

$$\begin{aligned} f(x) &\geq -\frac{2}{e}x + \frac{5}{e} \Leftrightarrow (x + 2)e^{-x} \geq \frac{1}{e}(-2x + 5) \\ &\Leftrightarrow e^{-x} \geq \frac{-2x+5}{e(x+2)} \quad \text{car } (x + 2) > 0 \text{ sur } [0; +\infty[\end{aligned}$$